

MATEMÁTICA FINANCEIRA

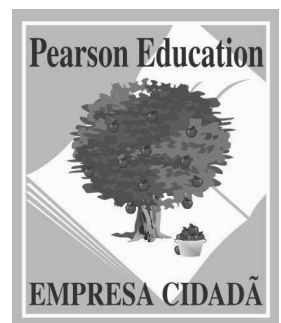


C A R L O S P A T R I C I O

SAMANEZ



MATEMÁTICA FINANCEIRA



CARLOS PATRÍCIO
SAMANEZ

MATEMÁTICA FINANCEIRA



PEARSON

abdr
ASSOCIAÇÃO
BRASILEIRA
DE DIREITOS
REPROGRÁFICOS
Respeite o direito autoral

© 2010 by Carlos Patricio Samanez

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Direitor editorial: Roger Trimer

Gerente editorial: Sabrina Cairo

Supervisor de produção editorial: Marcelo Françaço

Editora plena: Thelma Babaoka

Preparação: Norma Gusukuma

Revisão: Maria Alice da Costa

Capa: Alexandre Mieda

Editoração eletrônica e diagramação: Casa de Ideias

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Samanez, Carlos Patricio

Matemática financeira / Carlos Patricio Samanez. – 5. ed. – São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2010.

ISBN: 978-85-7605-799-4

1. Matemática financeira 2. Matemática financeira — Estudo e ensino
I. Título.

10-03950

CDD-650.0151307

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática financeira : Estudo e ensino CDD-650.0151307

4ª reimpressão – fevereiro 2014

Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à

Pearson Education do Brasil Ltda.,

uma empresa do grupo Pearson Education

Rua Nelson Francisco, 26

CEP 02712-100 – São Paulo – SP – Brasil

Fone: (11) 2178-8686 – Fax: (11) 2178-8688

vendas@pearson.com

*Ao meu pai,
Ignacio Samanez Richter, em memória*



Sumário

Capítulo 1 Juros simples 1

- 1.1 Conceitos básicos: juros, remuneração do capital e taxa de juros 1
- 1.2 Regime de juros simples 2
- 1.3 Determinação da data de vencimento e prazo das aplicações: contagem de dias entre duas datas 9
 - Exercícios propostos 12

Capítulo 2 Juros compostos 15

- 2.1 Regime de capitalização composta ou exponencial 15
- 2.2 Capitalização e desconto a juros compostos: cálculo do montante e do principal 16
- 2.3 Uso básico da calculadora financeira HP 12c 17
- 2.4 Equivalência de capitais a juros compostos 21
- 2.5 Cálculo com prazos fracionários 29
 - Exercícios propostos 31

Capítulo 3 Taxas de juros 36

- 3.1 Taxa de juros nominal 36
- 3.2 Taxa proporcional (taxa linear) 38
- 3.3 Taxa de juros efetiva 45
- 3.4 Equivalência entre taxas de juros efetivas 47
- 3.5 Taxa *over* (taxa por dia útil) 59
 - Exercícios propostos 65

Capítulo 4 Operações de curto prazo 69

- 4.1 Desconto 69
- 4.2 Títulos públicos 81
- 4.3 *Factoring* 82
- 4.4 *Hot money* 84
- 4.5 *Commercial papers* 85
- 4.6 *Export note* 87
- 4.7 Conta garantida 87
 - Exercícios propostos 87

Capítulo 5 Séries periódicas uniformes 91

- 5.1 Valor presente de séries periódicas uniformes 92
- 5.2 Montante de séries periódicas uniformes 107
- 5.3 Cálculo da taxa de juros em séries periódicas uniformes 115
- 5.4 Taxa interna de retorno de séries mistas 126
 - Exercícios propostos 128

Capítulo 6 Séries variáveis 133

- 6.1 Séries variáveis 133
- 6.2 Gradientes uniformes 133
- 6.3 Séries variáveis em progressão geométrica 139
- 6.4 Perpetuidades 140
 - Exercícios propostos 144

Capítulo 7 Capitalização contínua 146

- 7.1 Valor presente de capitais uniformemente distribuídos 149
 - Exercícios propostos 153

Capítulo 8 Planos de amortização de empréstimos e financiamentos 155

- 8.1 Reembolso de empréstimos e financiamentos 155
- 8.2 Custo efetivo (taxa interna de retorno) de planos de amortização 166
- 8.3 Sistemas de financiamento habitacional 168
 - Exercícios propostos 171

Capítulo 9 Cálculo financeiro em contexto inflacionário 173

- 9.1 Índices de preços 174
- 9.2 Taxa de juros aparente e taxa de juros real 174
- 9.3 Taxa efetiva em moeda nacional para operações em moeda estrangeira 175
 - Exercícios propostos 185

Capítulo 10 Métodos e critérios de avaliação de investimentos de capital 187

- 10.1 Método do valor presente líquido (VPL) 188
- 10.2 Método da taxa interna de retorno (TIR) 188
- 10.3 Método do *pay-back* descontado 189
- 10.4 Método do custo-benefício 190
- 10.5 Método da anuidade equivalente 190
- 10.6 Método do custo anual equivalente 192
- 10.7 Alternativas mutuamente exclusivas 205
- 10.8 Ranking e seleção de alternativas de investimento — racionamento de capital 215
- 10.9 Avaliação do *leasing* financeiro 217
- 10.10 Crédito direto ao consumidor 219
- 10.11 Avaliação do *leasing* financeiro: o caso da pessoa jurídica 223
 - Exercícios propostos 225

Capítulo 11 Análise e avaliação econômica de investimentos de capital 231

- 11.1 A importância dos fluxos de caixa na avaliação econômica 231
- 11.2 Fluxo de caixa incremental 231
- 11.3 Considerações na montagem do fluxo de caixa 232
- 11.4 Fluxo econômico 232
- 11.5 Fluxo econômico-financeiro 233
- 11.6 Decisões econômicas e financeiras 233
- 11.7 Análise das diversas variáveis e custos econômicos na determinação do fluxo de caixa incremental 234
- 11.8 Tratamento da inflação 238
- 11.9 Decisões de investimento em moeda nacional e em moeda estrangeira 242
- 11.10 Montagem do fluxo de caixa para avaliação econômica de projetos de investimento 243
- 11.11 Incrementalidade dos fluxos de caixa e efeitos fiscais 245
- 11.12 Ponto de equilíbrio econômico 247
 - Exercícios propostos 250

Apêndice A Matemática financeira com Excel 253

Apêndice B Tabelas financeiras 272

Respostas dos exercícios propostos 275

Bibliografia 287

Sobre o Autor 289

Prefácio

Atualmente, o cálculo financeiro e a análise de investimentos são ferramentas essenciais para a tomada de decisões e a gestão financeira das empresas e das pessoas. Assim, ter habilidade para lidar com cálculos e investimentos é hoje um requisito fundamental.

Um dos méritos deste livro, que contribuiu para torná-lo um sucesso entre estudantes e professores ao longo de suas edições, é exatamente esse: desenvolver a habilidade dos leitores em cálculos e investimentos de modo gradual e efetivo. Para isso, ele traz uma grande quantidade de exemplos de aplicação — que são resolvidos analiticamente e com o uso da HP 12c — e numerosos exercícios propostos, além de diagramas que facilitam a compreensão dos problemas.

Em um esforço pela melhoria contínua, esta edição apresenta um texto de mais fácil leitura, em função da eliminação de redundâncias e de uma estrutura mais didática e ágil. Além disso, visando atender às exigências do mercado, um apêndice sobre como utilizar o Excel para efetuar cálculos financeiros, assinado por Rafael Teixeira Pinto, especialista no assunto, finaliza a obra.

Companion Website



No Companion Website do livro (www.pearson.com.br/samanez), professores e estudantes podem acessar materiais adicionais em qualquer dia, durante 24 horas.

Para professores:

- Apresentações em PowerPoint.
- Manual de soluções de todos os exercícios propostos na obra.


Esse material é de uso exclusivo para professores e está protegido por senha. Para ter acesso a eles, os professores que adotam o livro devem entrar em contato com seu representante Pearson ou enviar e-mail para universitarios@pearson.com.

Com as mudanças baseadas nas necessidades dos leitores e a manutenção dos pontos que fizeram deste livro uma obra de grande aceitação entre os estudantes, professores e profissionais, tenho certeza de que esta quinta edição está plenamente de acordo com as disciplinas de matemática financeira e análise de investimentos e de que ela pode ser usada como apoio nas disciplinas de avaliação de empresas, administração financeira, análise de investimentos e engenharia econômica. Sua didática também faz com que ela seja ideal a todos que querem conhecer a matemática financeira para uso pessoal e profissional.

O autor

CAPÍTULO

Juros simples



Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Conceitos básicos
- Remuneração a juros simples
- Cálculo do montante e do principal a juros simples
- Equivalência de capitais a juros simples

1.1 Conceitos básicos: juros, remuneração do capital e taxa de juros

Juro é a remuneração do capital empregado. Se aplicarmos um capital durante determinado período, ao fim do prazo obteremos um valor (montante) que será igual ao capital aplicado acrescido da remuneração obtida durante o período de aplicação.

A diferença entre o montante (S) e a aplicação (P) é denominada remuneração, rendimento do capital:

$$\text{rendimento} = \text{montante} - \text{aplicação}$$

O rendimento em uma aplicação financeira é o produto da taxa de juros (i) vezes o principal:

$$i = \frac{J(\text{rendimento})}{P(\text{aplicação})} \Rightarrow \text{rendimento} = P \times i = S - P$$

Igualando as duas expressões para cálculo do rendimento, pode-se obter uma relação para o montante:

$$S - P = P \times i \Rightarrow S = P(1 + i)$$

O mercado financeiro trabalha com base na taxa de juros percentual, porém é necessário colocá-la na forma fracionária para realizar os cálculos financeiros. O quadro a seguir apresenta alguns juros na forma de porcentagem e seu equivalente fracionário:

Forma percentual	Forma fracionária
20%	20/100 = 0,20
10%	10/100 = 0,10
1%	1/100 = 0,01
0,3%	0,3/100 = 0,003

Quando o prazo da operação é dado considerando-se os anos constituídos por meses de 30 dias, os juros são chamados comerciais; quando o número de dias corresponde àquele do ano civil (365 dias), são denominados juros exatos. Nos exemplos deste livro, salvo menção em contrário, serão considerados anos comerciais (360 dias). Neste texto, a moeda nacional será representada por '\$' e a moeda estrangeira, por 'US\$', quando se tratar de dólar norte-americano.

Usaremos a seguinte convenção para as taxas de juros:

a.a. = taxa ao ano; a.s. = taxa ao semestre; a.t. = taxa ao trimestre.
a.m. = taxa ao mês; a.d. = taxa ao dia;

Exemplos de aplicação

Exemplo 1.1

Calcular os juros obtidos (rendimento) por \$3.000 aplicados por um ano à taxa de juros simples de 25% a.a.

Dados: $P = \$3.000$, $i = 25\%$ a.a., $J = ?$

$$J = P \times i = \$3.000 \times 0,25 = \$750$$

Exemplo 1.2

Qual é o montante de \$1.600 aplicados por um ano à taxa de juros simples de 50% a.a.?

Dados: $P = \$1.600$, $i = 50\%$ a.a., $S = ?$

$$J = P \times i = \$1.600 \times 0,50 = \$800 \quad S = P + J = \$1.600 + \$800 = \$2.400$$

Exemplo 1.3

Qual é a taxa de juros simples que transforma \$4.500 em um montante de \$8.100 em um ano?

Dados: $P = \$4.500$, $S = \$8.100$, $i = ?$

$$J = S - P = \$8.100 - \$4.500 = \$3.600 \quad i = \frac{J}{P} = \frac{\$3.600}{\$4.500} = 0,8 = 80\% \text{ a.a.}$$

1.2 Regime de juros simples

No regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o mesmo principal. Não existe capitalização de juros nesse regime, pois os juros de determinado período não são incorporados ao principal para que essa soma sirva de base de cálculo dos juros do período seguinte. Consequentemente, o capital crescerá a uma taxa linear, e a taxa de juros terá um comportamento linear em relação ao tempo. Nesse regime, a taxa de juros pode ser convertida para outro prazo qualquer com base em multiplicações e divisões, sem alterar seu valor intrínseco, ou seja, mantém a proporcionalidade existente entre valores realizáveis em diferentes datas. A aplicação dos juros simples é muito limitada, tem algum sentido apenas no curtíssimo prazo.

1.2.1 Cálculo do rendimento a juros simples

O rendimento por uma aplicação financeira aplicada pelo prazo de um único período a que se refere a taxa de juros pode ser calculado da seguinte forma:

$$J = P \times i$$

Dado o comportamento linear dos cálculos no regime de juros simples, se aplicarmos um capital durante n períodos a que se refere a taxa de juros, o rendimento poderá ser calculado da seguinte maneira:

$$J = P \times i \times n$$

Por exemplo, se aplicarmos um capital de \$100 à taxa de juros simples de 15% a.a. durante três anos, teremos os seguintes rendimentos em cada ano:

$$J_1 = P \times i = \$100 \times 0,15 = \$15$$

$$J_2 = P \times i = \$100 \times 0,15 = \$15$$

$$J_3 = P \times i = \$100 \times 0,15 = \underline{\$15}$$

$$\text{Total: } \$45$$

O exemplo anterior permite observar que, no regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o investimento inicial (\$100). Os juros não são incorporados ao principal para servirem de base de cálculo dos juros do período seguinte.

Os juros totais obtidos no prazo de três anos podem ser calculados diretamente:

$$J = P \times i \times n = \$100 \times 0,15 \times 3 = \$45$$

Expressão para o cálculo dos juros (rendimento) em função do montante:

$$J = P \times i \times n \Rightarrow P = \frac{J}{i \times n}$$

$$J = S - P$$

$$J = S - \frac{J}{i \times n} \Rightarrow J = \frac{S \times i \times n}{1 + i \times n}$$

1.2.2 Períodos não inteiros

Algumas vezes, o período de investimento é somente uma fração do período expresso na taxa de juros. Nesses casos em que as unidades de tempo da taxa de juros e do período de investimento são diferentes, é necessário homogeneizá-las por meio de um ajuste na taxa. Vejamos alguns exemplos de ajuste na taxa de juros:

a) Se a taxa de juros for mensal e o prazo de aplicação referir-se a dias:

$$J = P \times \left(\frac{i}{30} \right) \times n \quad (\text{juro comercial})$$

b) Se a taxa de juros for anual e o prazo de aplicação referir-se a meses:

$$J = P \times \left(\frac{i}{12} \right) \times n \quad (\text{juro comercial})$$

c) Se a taxa de juros for anual e o prazo da aplicação referir-se a dias:

$$J = P \times \left(\frac{i}{360} \right) \times n \quad (\text{juros comerciais}) \quad J = P \times \left(\frac{i}{365} \right) \times n \quad (\text{juros exatos})$$

As taxas entre parênteses representam taxas proporcionais, homogêneas em relação ao prazo de aplicação.

Exemplos de aplicação

▶ Exemplo 1.4

Qual é o rendimento de \$10.000 aplicados por um mês à taxa de juros simples de 36% a.a.?

Dados: $P = \$10.000$, $n = 1$ mês, $i = 36\%$ a.a., $J = ?$

$$J = P \times i \times n = \$10.000 \times \left(\frac{0,36}{12} \right) \times 1 = \$300$$

▶ Exemplo 1.5

Determinar a taxa de juros simples para 22 dias de aplicação, equivalente à taxa de 3,05% a.m.

Dados: $n = 22$ dias, $i = 3,05\%$ a.m., $i_{22 \text{ dias}} = ?$

$$i_{22 \text{ dias}} = \left(\frac{0,0305}{30} \right) \times 22 = 0,0224 = 2,24\% \text{ em 22 dias}$$

▶ Exemplo 1.6

Calcular o rendimento de \$12.000 aplicados durante os primeiros cinco meses do ano à taxa de juros simples de 40% a.a. Efetuar os cálculos considerando ano comercial (360 dias) e ano civil (365 dias).

Dados: $P = \$12.000$, $n = 150$ dias (comercial), 151 (civil), $i = 40\%$ a.a., $J = ?$

ano comercial:

ano civil:

$$J = \$12.000 \times \left(\frac{0,40}{360} \right) \times 150 = \$2.000 \quad J = \$12.000 \times \left(\frac{0,40}{365} \right) \times 151 = \$1.985,75$$

▶ Exemplo 1.7

Calcular o rendimento de \$23.000 aplicados por 14 dias à taxa de juros simples de 2,5% a.m.

Dados: $P = \$23.000$, $i = 2,5\%$ a.m., $n = 14$ dias, $J = ?$

$$J = P \times i \times n = \$23.000 \times \left(\frac{0,025}{30}\right) \times 14 = \$268,33$$

► **Exemplo 1.8**

Em sete meses \$18.000 renderam \$4.000 de juros. Qual é a taxa anual de juros simples obtida?

Dados: $P = \$18.000$, $J = \$4.000$, $n = 7$ meses, $i = ?$

$$J = P \times i \times n$$

$$\$4.000 = \$18.000 \times \left(\frac{i}{12}\right) \times 7 \Rightarrow i = \left(\frac{\$4.000}{\$18.000}\right) \times \frac{12}{7} = 0,381 = 38,1\% \text{ a.a.}$$

► **Exemplo 1.9**

Um capital de \$5.000 rendeu \$1.200 em 180 dias. Qual é a taxa anual de juros simples obtida?

Dados: $P = \$5.000$, $J = \$1.200$, $n = 180$ dias, $i = ?$

$$J = P \times i \times n$$

$$\$1.200 = \$5.000 \times \left(\frac{i}{360}\right) \times 180 \Rightarrow i = \left(\frac{\$1.200}{\$5.000}\right) \times \frac{360}{180} = 0,48 = 48\% \text{ a.a.}$$

► **Exemplo 1.10**

Um capital aplicado por 138 dias a juros simples de 12% a.m. transformou-se em \$23.000. Calcular os rendimentos da aplicação.

Dados: $n = 138$ dias, $i = 12\% \text{ a.m.}$, $S = \$23.000$, $J = ?$

$$J = \frac{S \times i \times n}{1 + i \times n} = \frac{\$23.000 \times \left(\frac{0,12}{30}\right) \times 138}{1 + \left(\frac{0,12}{30}\right) \times 138} = \$8.180,41$$

► **Exemplo 1.11**

Um capital aplicado por três meses a juros simples de 4% a.m. rendeu \$360. Determinar o valor do capital.

Dados: $n = 3$ meses, $i = 4\% \text{ a.m.}$, $J = \$360$, $P = ?$

$$J = P \times i \times n$$

$$\$360 = P \times 0,04 \times 3 \Rightarrow P = \frac{\$360}{0,12} = \$3.000$$

► Exemplo 1.12

Um título foi resgatado por \$3.000 ao término do prazo da aplicação. Se a taxa de juros simples aplicada foi de 180% a.a. e os juros obtidos totalizaram \$1.636,36, quantos meses durou a aplicação?

Dados: $S = \$3.000$, $i = 180\%$ a.a., $J = \$1.636,36$, $n = ?$ (meses)

$$J = \frac{S \times i \times n}{1 + i \times n}$$

$$\$1.636,36 = \frac{\$3.000 \times \left(\frac{1,80}{12}\right) \times n}{1 + \left(\frac{1,80}{12}\right) \times n}$$

$$\$1.636,36 = \frac{450n}{1 + 0,15 \times n} \Rightarrow n = 8 \text{ meses}$$

1.2.3 Capitalização e desconto a juros simples: cálculo do principal e do montante

O montante ou valor de resgate de uma aplicação é o capital inicialmente investido (principal) acrescido de sua remuneração no período (juros obtidos):

montante = principal + juros

$$S = P + P \times i \times n$$

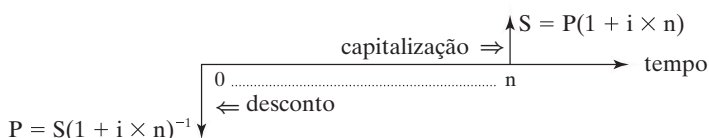
$$S = P(1 + i \times n)$$

O cálculo do principal a partir do montante é simplesmente o processo inverso:

$$P = \frac{S}{(1 + i \times n)}$$

No cálculo financeiro, o diagrama de fluxo de caixa serve para mostrar graficamente as transações financeiras em determinado período. O tempo é representado por uma linha horizontal dividida pelo número de períodos relevantes na análise. Por convenção, as entradas ou recebimentos são representados por setas verticais apontadas para cima, e as saídas ou pagamentos, por setas verticais apontadas para baixo.

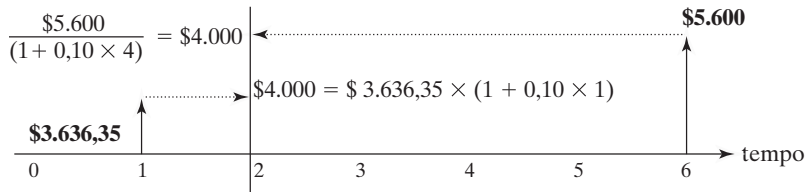
O diagrama a seguir representa o processo de capitalização e o desconto de capitais no regime de juros simples:



O processo de capitalização consiste no cálculo do montante ou no valor futuro de um capital, enquanto o processo de desconto consiste em calcular o valor atual de um montante futuro. Um é o inverso do outro.

1.2.4 Equivalência de capitais a juros simples

Dizemos que dois capitais são equivalentes quando têm o mesmo valor em determinada data de avaliação (data focal). O diagrama de fluxo a seguir ilustra a equivalência (na data focal 2) a juros simples de 10% de dois capitais: um de \$3.636,35 que ocorre na data 1 e outro de \$5.600 na data 6:



Se mudarmos a data focal, a equivalência dos capitais não será mantida. Consequentemente, a juros simples, capitais equivalentes em determinada época não o serão em outra. Esse resultado é produto do processo de cálculo adotado no regime linear ou de juros simples, em que não se pode fracionar o prazo da aplicação.

↑ Exemplos de aplicação

▶ Exemplo 1.13

Qual é o valor de resgate de \$500 aplicados por 16 meses à taxa de juros simples de 12% a.t.?

Dados: $P = \$500$, $n = 16$ meses, $i = 12\%$ a.t., $S = ?$

$$S = P(1 + i \times n) = \$500 \times \left(1 + \frac{0,12}{3} \times 16\right) = \$820$$

▶ Exemplo 1.14

Em dois meses, \$5.050 transformaram-se em \$5.600. Qual foi a taxa de juros simples anual obtida?

Dados: $S = \$5.600$, $n = 2$ meses, $P = \$5.050$, $i = ?$ (a.a.)

$$S = P(1 + i \times n)$$

$$\$5.600 = \$5.050 \left(1 + \frac{i}{12} \times 2\right) \Rightarrow i = \left(\frac{\$5.600}{\$5.050} - 1\right) \times \frac{12}{2} = 65,35\% \text{ a.a.}$$

▶ Exemplo 1.15

Qual o capital que, aplicado à taxa de juros simples de 20% a.m., em três meses monta \$8.000?

Dados: $S = \$8.000$, $n = 3$ meses, $i = 20\%$ a.m., $P = ?$

$$P = \frac{S}{1 + i \times n} = \frac{\$8.000}{1 + 0,20 \times 3} = \$5.000$$

▶ Exemplo 1.16

Aplicado por 105 dias, um capital de \$100.000 transformou-se em \$145.000. Calcular a taxa mensal de juros simples obtida.

Dados: $P = \$100.000$, $S = \$145.000$, $n = 105$ dias, $i = ?$

$$S = P(1 + i \times n)$$

$$\$145.000 = \$100.000 \times \left[1 + \left(\frac{i}{30} \right) \times 105 \right] \Rightarrow i = \left(\frac{145}{100} - 1 \right) \times \frac{30}{105} = 12,86\% \text{ a.m.}$$

▶ Exemplo 1.17

Em quantos meses um capital dobra a juros simples de 200% a.a.?

Dados: $i = 200\%$ a.a., $S = 2P$, $n = ?$

$$S = P(1 + i \times n)$$

$$2P = P \left[1 + \left(\frac{2,00}{12} \right) \times n \right] \Rightarrow n = 6 \text{ meses}$$

▶ Exemplo 1.18

Em quantos meses um capital de \$400 rende \$80 a juros simples de 60% a.a.?

Dados: $i = 60\%$ a.a., $S = \$480$, $P = \$400$, $J = \$80$, $n = ?$

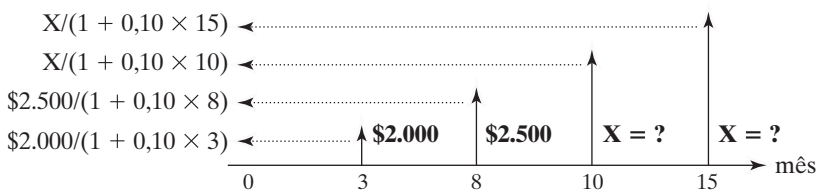
$$S = P(1 + i \times n)$$

$$\$480 = \$400 \left[1 + \left(\frac{0,60}{12} \right) \times n \right] \Rightarrow n = \left(\frac{\$480}{\$400} - 1 \right) \times \frac{12}{0,60} = 4 \text{ meses}$$

▶ Exemplo 1.19

Uma pessoa tem os seguintes compromissos a pagar: \$2.000 daqui a três meses e \$2.500 daqui a oito meses. Ela quer trocar esses débitos por dois pagamentos iguais, um para dez meses e outro para 15 meses. Calcular o valor desses pagamentos se a taxa de juros simples for de 10% a.m.

Dados: $i = 10\%$ a.m., $S_1 = \$2.000$, $S_2 = \$2.500$, $X = ?$



Os dois esquemas de pagamento são financeiramente equivalentes em determinada data de avaliação. Definindo a data zero como data focal e colocando todos os valores nessa data, temos a seguinte equação de valor:

$$\frac{\$2.000}{1 + 0,10 \times 3} + \frac{\$2.500}{1 + 0,10 \times 8} = \frac{X}{1 + 0,10 \times 10} + \frac{X}{1 + 0,10 \times 15}$$

$$\$2.927,35 = X \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2,5} \right) \Rightarrow X = \frac{2.927,35}{0,9} = \$3.252,61$$

Mudando a data de avaliação para o décimo mês e colocando todos os valores nessa data, temos a seguinte equação de valor:

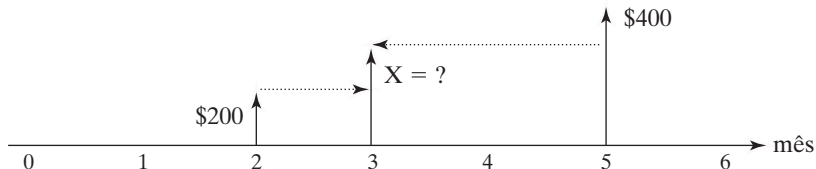
$$\$2.000 \times (1 + 0,10 \times 7) + \$2.500 \times (1 + 0,10 \times 2) = X + \frac{X}{1 + 0,10 \times 5} \Rightarrow X = \$3.840$$

Podemos observar que, alterando a data focal, o resultado muda, pois, a juros simples, capitais equivalentes em determinada época não o são em outra.

Exemplo 1.20

Uma pessoa deve pagar \$200 daqui a dois meses e \$400 daqui a cinco meses. A juros simples de 5% a.m., determinar o valor de um pagamento único a ser efetuado daqui a três meses que liquide a dívida.

Dados: $i = 5\%$ a.m., $S_2 = \$200$, $S_5 = \$400$, $X = ?$



Como o pagamento único será efetuado no terceiro mês, definimos esse mês como data focal. Por equivalência de capitais, os dois planos de pagamento devem ser financeiramente equivalentes naquela data. Logo, temos:

$$\underbrace{\text{Valor no 3º mês do plano com pagamento único}}_X = \underbrace{\text{Valor no 3º mês do plano com dois pagamentos}}_{\$200 \times (1 + 0,05 \times 1) + \$400 / (1 + 0,05 \times 2)}$$

$$X = \$573,64$$

1.3 Determinação da data de vencimento e prazo das aplicações: contagem de dias entre duas datas

Para determinar a data de vencimento e o prazo das aplicações, podemos usar a ‘tábua para contagem de dias entre duas datas’, que aparece a seguir. Para tanto, devemos sub-

trair, do número de dias correspondente à data posterior, o número que corresponde à data anterior, tendo o cuidado de, no caso de anos bissextos, acrescentar 1 (um) ao resultado encontrado.

Tábua para contagem de dias entre duas datas

	JAN.	FEV.	MAR.	ABR.	MAIO	JUN.	JUL.	AGO.	SET.	OUT.	NOV.	DEZ.
1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	
2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	
3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	
4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	
5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	
6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	
7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	
8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	
9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	
10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	
11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	
12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	
13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	
14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	
15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	
16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	
17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	
18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	
19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	
20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	
21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	
22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	
23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	
24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	
25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	
26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	
27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	
28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	
29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	
30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	
31		90		151		212	243		304		365	

Exemplos de aplicação

Exemplo 1.21

Um capital de \$1.000 aplicado em 12 de fevereiro a juros simples de 0,2% a.d. foi resgatado em 14 de julho do mesmo ano. Determinar o valor de resgate.

Dados: $P = \$1.000$, $i = 0,2\%$ a.d., $n = ?$, $S = ?$

Determinação do prazo usando a tábua para contagem de dias entre duas datas do ano civil:

$$\begin{array}{r} \text{número de dias da data posterior (14 de julho)} = +195 \\ \text{número de dias da data anterior (12 de fevereiro)} = -43 \\ \hline \text{prazo: } 152 \end{array}$$

$$S = P(1 + i \times n) = \$1.000 \times (1 + 0,002 \times 152) = \$1.304$$

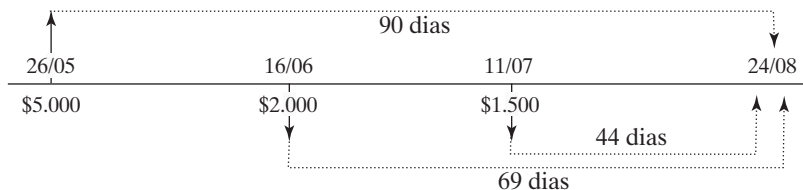
Exemplo 1.22

No dia 26 de maio foi contratado um empréstimo de \$5.000 a juros simples de 24% a.a. para ser totalmente liquidado em 90 dias. No dia 16 de junho foram pagos \$2.000 e no dia 11 de julho, \$1.500. Determinar a data de vencimento da dívida e o valor da quantia que deverá ser paga naquela data para liquidar a dívida.

Determinação da data de resgate da aplicação usando a tábua para contagem de dias entre duas datas do ano civil:

$$\begin{array}{r} \text{número de dias da data posterior (?) = } + n \\ \text{número de dias da data anterior (26 de maio)} = -146 \\ \hline \text{prazo: } 90 \end{array}$$

Logo, $n - 146 = 90 \Rightarrow n = 236$, que na tábua corresponde ao dia 24 de agosto (data de vencimento).



Valor de resgate

$$= \$5.000 \left(1 + \frac{0,24}{360} \times 90 \right) - \$2.000 \left(1 + \frac{0,24}{360} \times 69 \right) - \$1.500 \left(1 + \frac{0,24}{360} \times 44 \right) = \$1.664$$

Os juros simples têm aplicações práticas bastante limitadas, pois são raras as operações financeiras e comerciais que usam esse regime. Seu uso restringe-se principalmente às operações praticadas no âmbito do curto prazo. No entanto, essas operações de curto prazo que adotam juros simples em seus cálculos não costumam apurar seu custo ou rentabilidade efetiva por meio desse regime. Os juros simples são utilizados basicamente para o cálculo dos valores monetários, e não para determinar o resultado efetivo da operação. Um caso típico é o referente ao desconto comercial ou bancário, que será estudado no Capítulo 4, em que os valores monetários (juros, valor de resgate, valor descontado etc.) são calculados pelos juros simples, mas o custo efetivo da operação (taxa de desconto efetiva exponencial) é determinado no regime de juros compostos, que será estudado no capítulo seguinte.

Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios, considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias.

1. Qual é a taxa anual de juros simples obtida por uma aplicação de \$1.300 que, após um ano, produz um montante de \$1.750?
2. Qual é a remuneração obtida por um capital de \$2.400 aplicado durante 17 meses à taxa de juros simples de 60% a.a.?
3. Calcular o rendimento de um capital de \$80.000 aplicado durante 28 dias à taxa de juros simples de 26% a.m.
4. Aplicando \$80.000 durante 17 meses, resgatamos \$140.000. Qual é a taxa anual de juros simples obtida na operação?
5. Em quantos meses um capital de \$28.000 aplicado à taxa de juros simples de 48% a.a. produz um montante de \$38.080?
6. Um capital aplicado transformou-se em \$13.000. Considerando uma taxa de juros simples de 42% a.a. e uma remuneração de \$4.065,29, determinar o prazo da aplicação.
7. Um capital de \$135.000 transformou-se em \$180.000 após 44 dias de aplicação. Calcular a taxa de juros simples obtida na operação.
8. João tem uma dívida de \$35.000 que vence em 16 meses. Pretende pagar \$12.000 no fim de 158 dias e \$13.000, 189 dias depois desse primeiro pagamento. Quanto deve pagar na data de vencimento de modo que liquide a dívida? Considere juros simples de 50% a.a. e data focal no vencimento da dívida.
9. Um capital acrescido de seus juros de 21 meses soma \$156.400. O mesmo capital diminuído de seus juros de nove meses é reduzido a \$88.400. Calcular o capital e a taxa de juros simples obtidos.
10. Um capital de \$4.500 foi dividido em três parcelas que foram aplicadas pelo prazo de um ano: a primeira, a juros simples de 4% a.t.; a segunda, a juros simples de 6% a.t.; e a terceira, a juros simples de 10% a.t. Se o rendimento da primeira parcela for de \$160 e o das três parcelas totalizar \$1.320, calcular o valor de cada parcela.
11. Dois capitais, um de \$2.400 e outro de \$1.800, foram aplicados a uma mesma taxa de juros simples. Calcular essa taxa considerando que o primeiro capital em 48 dias rendeu \$17 a mais que o segundo em 30 dias.
12. Um capital foi aplicado a juros simples de 42% a.a. durante 50 dias. Calcular o capital, sabendo-se que, se a diferença entre ele e os juros obtidos fosse aplicada à mesma taxa, renderia \$988,75 em um trimestre.
13. Certo capital foi aplicado a juros simples de 30% a.a. durante 50 dias. Calcular o capital e o rendimento obtidos, sabendo-se que, se a diferença entre ambos, acrescida de \$10.000, fosse aplicada à mesma taxa, renderia \$95.000 no prazo de um ano.

14. Uma pessoa aplicou dois capitais a juros simples: o primeiro, a 33% a.a.; e o segundo, a 45% a.a. Se o rendimento de ambas as aplicações totalizou \$52.500 no prazo de um ano, determinar o valor dos capitais, sabendo-se que o primeiro é 37,5% menor que o segundo.
15. Há 13 meses e dez dias, um capital de \$10.000 foi aplicado à taxa de juros simples de 6% a.a. Se hoje fosse aplicada a importância de \$8.000 a juros simples de 12% a.a., e o primeiro capital continuar aplicado à mesma taxa, em que prazo os montantes respectivos seriam iguais?
16. Uma empresa obteve um empréstimo de \$200.000 a juros simples de 10% a.a. Algum tempo depois liquidou a dívida, inclusive os juros, e tomou um novo empréstimo de \$300.000 a juros simples de 8% a.a. Dezoito meses após o primeiro empréstimo liquidou todos os seus débitos, tendo pago \$35.000 de juros totais nos dois empréstimos. Determinar os prazos (em meses) dos dois empréstimos.
17. Uma pessoa tomou um empréstimo a juros simples de 9% a.a.; 45 dias depois, pagou a dívida e contraiu um novo empréstimo duas vezes maior que o primeiro, pelo prazo de dez meses, a juros simples de 6% a.a. Sabendo-se que pagou ao todo \$111.250 de juros, calcular o valor do primeiro empréstimo.
18. Um capital foi dividido em duas parcelas e aplicado a taxas e prazos diferentes. A primeira foi aplicada a juros simples de 10% a.m. durante seis meses, e a segunda, a juros simples de 2% a.m. durante 12 meses. Se a primeira parcela for \$50 maior e render \$60 a mais que a segunda, determinar os valores de ambas as parcelas.
19. Aplicado a juros simples pelo prazo de um ano, um capital transformou-se em \$13.000. A seguir, esse montante foi reaplicado por mais dois anos a uma taxa 20% maior que a da primeira aplicação, obtendo-se um montante final de \$22.360. Calcular o valor do capital inicialmente aplicado e a taxa de juros simples ao ano à qual ele foi aplicado.
20. Uma pessoa aplicou um capital em uma conta remunerada que rende juros simples de 30% a.a. Depois de três anos, resgatou metade dos juros obtidos e reaplicou a outra metade por um ano à taxa de juros simples de 32% a.a., obtendo um rendimento de \$20,16 nessa última aplicação. Calcular o valor do capital aplicado inicialmente.
21. Dois capitais foram colocados a juros simples, o primeiro à taxa de 20% a.a. e o segundo à de 40% a.a. Calcular os capitais, sabendo-se que, somados, eles montam \$500 e que os dois, em um ano, renderam juros totais de \$130.
22. Um capital de \$50.000 aplicado a juros simples rendeu \$1.875 em determinado prazo. Se o prazo fosse 36 dias maior, o rendimento aumentaria em \$250. Calcular a taxa de juros simples ao ano e o prazo da operação em dias.
23. Uma pessoa levantou um empréstimo de \$3.000 a juros simples de 18% a.a. para ser liquidado daqui a 270 dias. Se a pessoa amortizou \$1.000 no 75º dia, quanto deverá pagar na data de vencimento de modo a liquidar a dívida? (Data focal: 270º dia.)
24. Uma empresa tem duas dívidas a pagar: a primeira, de \$2.500, contratada a juros simples de 2,5% a.m., vence daqui a 45 dias; e a segunda, de \$3.500, a juros simples de 3% a.m., vence daqui a 90 dias. Calcular a quantia necessária que liquide ambas as dívidas daqui a 180 dias, considerando que, no 30º dia do seu prazo, a primeira dívida foi amortizada em \$1.500 e, no 60º dia do seu prazo, a segunda foi amortizada em \$3.000. (Data focal: 180º dia.)
25. Uma pessoa tem duas dívidas a pagar: a primeira, de \$1.000, vence daqui a 45 dias, e a segunda, de \$3.500, vence daqui a 120 dias. Se a pessoa pretende liquidar as dívidas por meio de dois pagamentos iguais, com vencimentos daqui a 90 e 180 dias, respectivamente, calcular o importe de cada pagamento se ambas as dívidas foram contratadas a juros simples de 2% a.m. (Data focal: 180º dia.)
26. Determinar:
 - a. o tempo em que triplica um capital aplicado a juros simples de 5% a.m.;
 - b. o tempo em que quintuplica um capital aplicado a juros simples de 15% a.t.;
 - c. o tempo em que um capital de \$12.000 rende \$541,68 quando aplicado a juros simples de 12,5% a.a.;

- d. o tempo em que um capital de \$7.000 se transforma em um montante de \$7.933,34 quando aplicado a juros simples de 24% a.a.
27. Determinar:
- a taxa de juros simples anual que produz um rendimento de \$60 em 36 dias a partir de um capital de \$2.000;
 - a taxa de juros simples mensal que produz um rendimento de \$6.000 em 30 meses a partir de um capital de \$8.000;
 - a taxa de juros simples anual embutida na compra de um bem cujo valor à vista é de \$3.000, pelo qual será paga uma entrada de \$1.000 mais um pagamento de \$2.200 para 60 dias.
28. Calcular:
- o capital que aplicado a juros simples de 24% a.a. rende \$300 em 126 dias;
 - o capital que aplicado a juros simples de 26% a.a. rende \$800 em sete trimestres;
 - o rendimento de uma aplicação de \$10.000 por 446 dias a juros simples de 24% a.a.
29. Calcular:
- o rendimento de um capital de \$2.000 aplicado a juros simples de 2,5% a.m. desde o dia 12 de março até o dia 5 de junho do mesmo ano;
 - o valor do capital que rendeu \$3.000 no período compreendido entre 4 de abril e 31 de maio do mesmo ano a juros simples de 2% a.m.;
 - o valor de resgate de um capital de \$5.000 aplicado a juros simples de 2% a.m. pelo período compreendido entre 6 de abril e 26 de junho do mesmo ano;
 - o capital que se transformou em um montante de \$20.000 no período compreendido entre 30 de junho e 31 de dezembro do corrente ano, a juros simples de 2% a.m.;
 - a taxa de juros simples mensal obtida por uma aplicação de \$24.000 que rendeu \$2.800 no período compreendido entre 23 de maio e 18 de agosto do mesmo ano.
30. No dia 26 de maio foi contratado um empréstimo de \$7.000 a juros simples de 24% a.a. para ser totalmente liquidado em 90 dias. No dia 16 de junho foram amortizados \$3.000, e no dia 11 de julho, \$2.500. Determinar a data de vencimento da dívida e o valor da quantia que deverá ser paga naquela data para liquidar a dívida. (Data focal: 90^o dia.)
31. Determinar o rendimento de um capital de \$2.000 aplicado desde o dia 3 de março até o dia 28 de junho do corrente ano. A taxa de juros simples inicialmente contratada foi de 3% a.m., mas posteriormente caiu para 2,8% a.m. no dia 16 de abril e para 2,6% a.m. no dia 16 de junho.
32. Uma dívida de \$2.000 contraída no dia 8 de junho para ser liquidada no dia 8 de julho foi contratada originalmente a juros simples de 2% a.m. Calcular o rendimento da aplicação, sabendo-se que a taxa de juros subiu para 2,5% a.m. no dia 12 de junho, para 3% a.m. no dia 24 de junho e para 3,5% a.m. no dia 3 de julho.
33. Uma aplicação financeira foi iniciada no dia 2 de junho com \$2.000. Posteriormente, foram efetuados dois depósitos adicionais de \$500 e de \$300 nos dias 8 e 16 e um saque de \$200 no dia 26 de junho. Se inicialmente foi contratada uma taxa de juros simples de 28% a.a., que depois baixou para 26% a.a. no dia 16 de junho, calcular o saldo disponível em 1^o de julho.
34. Hoje, uma pessoa tem duas dívidas: a primeira, de \$8.000, vence em 36 dias, e a segunda, de \$12.000, em 58 dias. A pessoa propõe-se a quitá-las por meio de dois pagamentos iguais, dentro de 45 e 90 dias, respectivamente. A juros simples de 24% a.a., calcular o valor de cada pagamento. (Data focal: 90^o dia.)
35. Resolver o exercício anterior tomando como data focal o 45^o dia.

CAPÍTULO

Juros compostos

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Capitalização composta
- Cálculo do montante e do principal a juros compostos
- Equivalência de capitais a juros compostos: a equação de valor

2.1 Regime de capitalização composta ou exponencial

O regime de juros compostos é o mais comum no dia a dia do sistema financeiro e do cálculo econômico. Nesse regime, os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. Ou seja, o rendimento gerado pela aplicação é incorporado a ela, passando a participar da geração do rendimento no período seguinte; dizemos, então, que os juros são capitalizados. Chamamos de capitalização ao processo de incorporação dos juros ao principal.

Se aplicarmos \$1.000 durante três anos à taxa de 20% a.a., teremos os seguintes rendimentos e montantes no regime de juros simples e no regime de juros compostos.

Ano	Juros simples		Juros compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	$\$1.000 \times 0,2 = \200	\$1.200	$\$1.000 \times 0,2 = \200	\$1.200
2	$\$1.000 \times 0,2 = \200	\$1.400	$\$1.200 \times 0,2 = \240	\$1.440
3	$\$1.000 \times 0,2 = \200	\$1.600	$\$1.440 \times 0,2 = \288	\$1.728

Um investimento de \$1.000 a juros simples de 20% a.a. ganha \$200 por ano. Em três anos, o montante seria de \$1.600. Contudo, se, à medida que forem recebidos, os juros forem incorporados ao principal, o montante será \$1.728 ao término dos três anos. O dinheiro cresce mais rapidamente a juros compostos que a juros simples. A juros compostos, o dinheiro cresce exponencialmente em progressão geométrica ao longo do tempo, dado que os rendimentos de cada período são incorporados ao saldo anterior e passam, por sua vez, a render juros. No regime de juros simples, o montante cresce linearmente, pois os juros de determinado período não são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte (não há capitalização de juros nesse regime).

Do ponto de vista técnico, o regime de juros compostos é superior ao de juros simples. Nesse regime, os prazos podem ser fracionados, o que permite apurar e manter a equivalência entre capitais em qualquer data focal. Isso é muito diferente em relação aos juros simples, em que capitais equivalentes em determinada época não o serão necessariamente em outra, pois os cálculos adotados no regime linear ou de juros simples não permitem fracionar o prazo da aplicação.

2.2 Capitalização e desconto a juros compostos: cálculo do montante e do principal

Vejamus o que acontece com o montante de um capital aplicado a uma taxa de juros composta (i) durante três períodos:

$$\text{Término do primeiro período: } S = P \times (1 + i)$$

$$\text{Término do segundo período: } S = P \times (1 + i) \times (1 + i)$$

$$\text{Término do terceiro período: } S = P \times (1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$$

Generalizando para n períodos, podemos calcular diretamente o montante, S , resultante da aplicação do principal, P , durante n períodos a uma taxa de juros composta i :

$$S = P(1 + i)^n$$

Na fórmula, a taxa de juros deve sempre referir-se à mesma unidade de tempo do período financeiro. O fator $(1 + i)^n$ é chamado *fator de capitalização*, ou *fator de valor futuro para aplicação única*. É o número pelo qual devemos multiplicar o valor da aplicação inicial para obter seu valor futuro ou de resgate. Esse fator pode ser encontrado nas tabelas financeiras no Apêndice deste livro ou calculado com o auxílio de calculadoras.

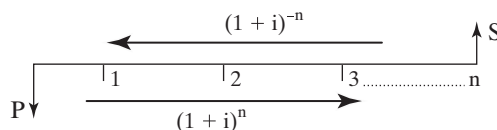
Se o capital fosse de \$1.000, a taxa composta, 20% a.a., e o prazo, três anos, o montante ao término do terceiro ano poderia ser calculado diretamente da seguinte forma:

$$S = \$1.000 \times (1 + 0,2)^3 = \$1.728$$

O cálculo do valor presente de um montante ou pagamento único é simplesmente o inverso do cálculo do montante:

$$P = S \left[\frac{1}{(1 + i)^n} \right]$$

Esquemáticamente, os fatores de valor futuro $(1 + i)^n$ e de valor presente $(1 + i)^{-n}$ permitem efetuar as seguintes operações:



No diagrama, a seta horizontal superior representa o processo de desconto de um pagamento ou montante único, e a seta inferior, o processo de capitalização de um principal.

Os fatores $(1 + i)^n$ e $(1 + i)^{-n}$ têm a seguinte finalidade:

- O fator $(1 + i)^n$ ‘empurra’ grandezas para a frente; permite encontrar o montante ou valor futuro de uma aplicação. Ou seja, capitaliza um principal levando-o a uma data posterior.
- O fator $(1 + i)^{-n}$ ‘puxa’ grandezas para trás; permite encontrar o principal de determinado montante. Ou seja, desconta um valor futuro trazendo-o a uma data anterior.

2.3 Uso básico da calculadora financeira HP 12c

A calculadora HP 12c é possivelmente a máquina mais utilizada no mundo das finanças. Ela possui até três funções por tecla: brancas, amarelas e azuis. As funções brancas são automáticas, e as amarelas e azuis aparecem acima e abaixo das teclas; para ativá-las, é necessário pressionar antes a tecla **(f)** para as amarelas ou **(g)** para as azuis. Veja a seguir algumas operações básicas da HP 12c:

Ligar a calculadora:	(ON)
Apagar o que aparece no visor:	(CLX)
Apagar o conteúdo de todos os registros:	(f) (REG)
Apagar o conteúdo das memórias financeiras:	(f) (FIN)
Introduzir um número:	(número) (ENTER)
Fazer um cálculo simples:	(número) (ENTER) (número) (operação)
Calcular porcentagem:	(número) (ENTER) (percentual) (%)
Calcular o exponencial (potenciação):	(número) (ENTER) (potência) (y^x)
Calcular o exponencial invertido (radiciação):	(número) (ENTER) (raiz) (1/X) (y^x)
Armazenar na memória:	(número) (ENTER) (STO) (número qualquer de memória)
Buscar um número na memória:	(RCL) (número de memória onde foi armazenado)
Fixar a quantidade de casas decimais:	(f) (número de casas decimais desejado)

Exemplos	Calculadora
Soma: $45 + 63 = 108$	45 (ENTER) 63 (+)
Multiplicação: $37 \times 14 = 518$	37 (ENTER) 14 (×)
Cálculos contínuos: $(28 + 54) / 8 = 10,50$	28 (ENTER) 54 (+) 8 (÷)
Percentual: 12% de 1.500 = 180	1.500 (ENTER) 12 (%)
Potenciação: $15^4 = 50.625$	15 (ENTER) 4 (y^x)
Radiciação: $\sqrt[4]{625} = 5$	625 (ENTER) 4 (1/X) (y^x)
Radiciação: $\sqrt[4]{5^3} = 3,34$	5 (ENTER) 3 (ENTER) 4 (÷) (y^x)

Observação: os parênteses indicam que as respectivas teclas devem ser pressionadas.

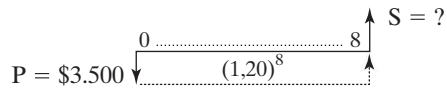
Exemplos de aplicação

Exemplo 2.1

A juros compostos de 20% a.a., qual é o montante de \$3.500 em oito anos?

Dados: $n = 8$ anos, $i = 20\%$ a.a., $P = \$3.500$, $S = ?$

Diagrama de fluxo:



$$S = P(1 + i)^n = \$3.500 \times (1 + 0,20)^8 = \$3.500 \times 4,29982 = \$15.049,37$$

O valor do fator $(1,20)^8$ pode ser observado nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro ou obtido com o auxílio de calculadoras com a função y^x . O cálculo do montante pode ser realizado rapidamente usando uma calculadora financeira. A seguir, mostramos a sequência na HP 12c:

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
3.500 (CHS) (PV)	insere o valor do principal com sinal negativo
20 (i)	insere a taxa de juros
8 (n)	insere o número de períodos
(FV) → 15.049,37	calcula o montante

Na HP 12c, **(i)** e **(n)** representam a taxa de juros efetiva e o prazo, respectivamente. **(PV)** é o principal ou valor que temos na data 0; **(FV)** é o valor futuro ou montante, que será igual ao valor da aplicação mais os juros obtidos. A diferença entre entradas e saídas pode ser simbolizada pelos sinais negativo e positivo, conforme convenção do usuário. Se o principal **(PV)** for inserido com sinal positivo, o montante **(FV)** será calculado com sinal negativo, e vice-versa; um deve ter necessariamente sinal oposto ao outro.

Exemplo 2.2

Usando as tabelas financeiras do Apêndice deste livro, obter os valores para os seguintes fatores: $(1,10)^6$, $(1,15)^{13}$, $(1,20)^{-3}$, $(1,13)^{28}$. Empregar cinco casas decimais.

$$(1,10)^6 = 1,77156 \quad (1,15)^{13} = 6,15279 \quad (1,20)^{-3} = \frac{1}{(1,20)^3} = 0,57870$$

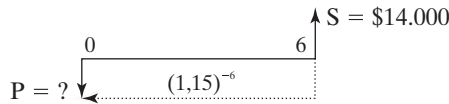
O fator $(1,13)^{28}$ não se encontra tabelado, mas, usando as propriedades multiplicativas das potências, pode-se calculá-lo a partir de fatores tabelados:

$$(1,13)^{28} = (1,13)^{20} \times (1,13)^8 = 11,52309 \times 2,05844 = 30,63349$$

► **Exemplo 2.3**

Qual é o capital que, em seis anos, à taxa de juros composta de 15% a.a., monta \$14.000?

Dados: $n = 6$ anos, $i = 15\%$ a.a., $S = \$14.000$, $P = ?$



$$P = S(1 + i)^{-n} = \$14.000 \times (1,15)^{-6} = \$6.052,59$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
14.000 (CHS) (FV)	
15 (i)	
6 (n)	
(PV) → 6.052,59	

apaga a memória financeira
 insere o valor do montante com sinal negativo
 insere a taxa de juros
 insere o número de períodos
 calcula o principal

► **Exemplo 2.4**

Em que prazo um empréstimo de \$55.000 pode ser quitado por meio de um único pagamento de \$110.624,80, se a taxa de juros composta cobrada for de 15% a.a.?

Dados: $P = \$55.000$, $S = \$110.624,80$, $i = 15\%$ a.a., $n = ?$

Pode-se aplicar a expressão do montante para, a seguir, destacar o fator financeiro implícito:

$$S = P(1 + i)^n$$

$$\$110.624,80 = \$55.000 \times (1 + 0,15)^n$$

$$2,01136 = (1,15)^n$$

Aplicando logaritmos: $\log 2,01136 = n \times \log 1,15 \Rightarrow n = \frac{\log 2,01136}{\log 1,15} = 5$ anos

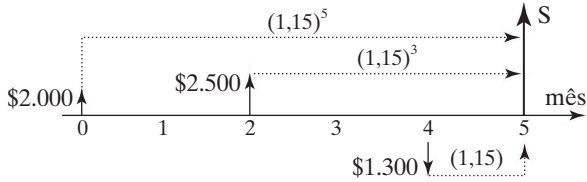
Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
110.624,80 (CHS) (FV)	
15 (i)	
55.000 (PV)	
(n) → 5	

apaga a memória financeira
 insere o valor do montante com sinal negativo
 insere a taxa de juros
 insere o valor do principal
 calcula o número de períodos

► **Exemplo 2.5**

Uma pessoa deposita \$2.000 em uma poupança. Dois meses depois, deposita mais \$2.500 e, dois meses depois desse último depósito, realiza uma retirada de \$1.300. Qual será o saldo da poupança ao final do quinto mês, considerando que a taxa de juros compostos obtida é de 15% a.m.?

O diagrama a seguir apresenta o fluxo e o processo de cálculo do saldo final da conta:



$$\begin{aligned} \$2.000 \times (1,15)^5 &= \$4.022,71 \\ \$2.500 \times (1,15)^3 &= \$3.802,19 \\ -\$1.300 \times (1,15) &= -\$1.495,00 \\ S &= \$6.329,90 \end{aligned}$$

► Exemplo 2.6

A que taxa de juros composta um capital de \$13.200 pode transformar-se em \$35.112,26, considerando um período de aplicação de sete meses?

Dados: $P = \$13.200$, $S = \$35.112,26$, $n = 7$, $i = ?$

$$\begin{aligned} S &= P(1 + i)^n \\ \Rightarrow i &= \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{35.112,26}{13.200,00}\right)^{1/7} - 1 = 0,15 = 15\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

► Exemplo 2.7

Quanto rende um capital de \$4.000 aplicado por dez meses a juros compostos de 2% a.m.?

Dados: $n = 10$, $i = 2\% \text{ a.m.}$, $P = \$4.000$, juros = ?

$$\begin{aligned} \text{juros} &= \text{montante} - \text{aplicação} \\ &= P(1 + i)^n - P \\ &= \$4.000 \times (1,02)^{10} - \$4.000 = \$875,98 \end{aligned}$$

► Exemplo 2.8

A que taxa de juros efetiva um capital de \$2.000 obtém um rendimento de \$280 em dois meses?

Dados: $n = 2$ meses, $P = \$2.000$, rendimento = \$280, $S = \$2.280$, $i = ?$

$$\begin{aligned} S &= P(1 + i)^n \\ \$2.280 &= \$2.000 \times (1 + i)^2 \Rightarrow i = \left(\frac{\$2.280}{\$2.000}\right)^{1/2} - 1 = 6,77\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

► Exemplo 2.9

Determinar o capital que, aplicado por sete meses a juros compostos de 4% a.m., rende \$10.000.

Dados: $n = 7$, rendimento = \$10.000, $i = 4\% \text{ a.m.}$, $P = ?$

rendimento = montante – aplicação

$$\$10.000 = P(1,04)^7 - P \Rightarrow P = \frac{\$10.000}{(1,04)^7 - 1} = \$31.652,40$$

▶ Exemplo 2.10

À taxa de juros composta de 5% a.m., em que prazo \$5.000 rendem juros de \$1.700,48?

Dados: P = \$5.000, rendimento = \$1.700,48, i = 5% a.m., n = ?

rendimento = montante – aplicação

$$\$1.700,48 = \$5.000 \times (1,05)^n - \$5.000$$

$$(1,05)^n = 1,340096$$

Aplicando logaritmos:

$$n \times \log(1,05) = \log(1,340096) \Rightarrow n = \frac{\log(1,340096)}{\log(1,05)} = 6 \text{ meses}$$

2.4 Equivalência de capitais a juros compostos

O princípio de equivalência de capitais é fundamental na resolução dos problemas de cálculo financeiro. Diz-se que dois capitais, com datas de vencimento determinadas, são equivalentes quando, levados para uma mesma data à mesma taxa de juros, tiverem valores iguais.

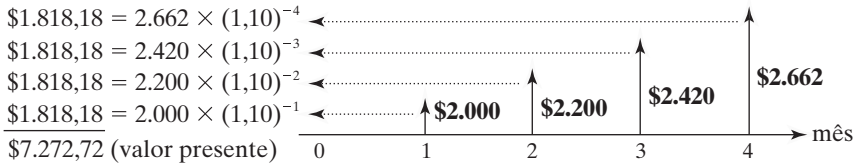
É importante ressaltar que, no regime de juros compostos, dois conjuntos de obrigações que sejam equivalentes em determinada data também o serão em qualquer outra. Como foi visto no Capítulo 1, isso não ocorre no regime de juros simples.

↑ Exemplos de aplicação

▶ Exemplo 2.11

Calcular o valor presente do conjunto de capitais apresentado a seguir e verificar se, a juros compostos de 10% a.m., eles são equivalentes.

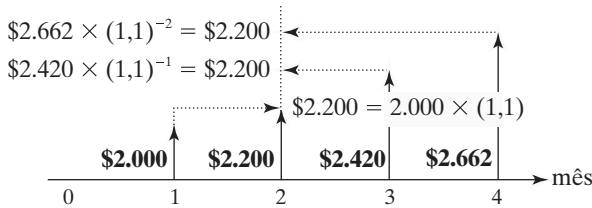
Capital	Mês de vencimento
\$2.000	1
\$2.200	2
\$2.420	3
\$2.662	4



$$\frac{\$2.000}{(1,10)} = \frac{\$2.200}{(1,10)^2} = \frac{\$2.420}{(1,10)^3} = \frac{\$2.662}{(1,10)^4} = \$1.818,18$$

Os capitais são equivalentes na data focal inicial (data zero), tendo em vista que seus valores atualizados naquela data são iguais.

Mudando a data focal para o segundo mês:



$$\$2.200 = \$2.000 \times (1,10) = \$2.420 \times (1,10)^{-1} = \$2.662 \times (1,10)^{-2}$$

constata-se que a equivalência dos capitais é mantida. No regime de juros compostos, uma vez verificada a equivalência para certa data focal, esta permanecerá válida para qualquer outra.

► **Exemplo 2.12**

Verificar se os conjuntos de capitais A e B são equivalentes, considerando-se uma taxa de juros composta de 10%.

CONJUNTO A		CONJUNTO B	
Capital	Mês de vencimento	Capital	Mês de vencimento
\$2.000,00	1	\$2.100,00	1
\$2.200,00	2	\$2.000,00	2
\$2.420,00	3	\$2.300,00	3
\$2.662,00	4	\$2.902,90	4

Dois conjuntos de capitais são equivalentes em determinada data focal quando a soma de seus valores atualizados para aquela data é igual. Escolhendo como data focal a data zero, tem-se:

$$\underbrace{\frac{\$2.000,00}{1,10} + \frac{\$2.200,00}{(1,10)^2} + \frac{\$2.420,00}{(1,10)^3} + \frac{\$2.662,00}{(1,10)^4}}_{\$7.272,72} = \underbrace{\frac{\$2.100,00}{1,10} + \frac{\$2.000,00}{(1,10)^2} + \frac{\$2.300,00}{(1,10)^3} + \frac{\$2.902,90}{(1,10)^4}}_{\$7.272,72}$$

Verifica-se que os valores presentes dos dois conjuntos de capitais são iguais e, portanto, equivalentes. Essa equivalência permanecerá para qualquer outra data focal.

► Exemplo 2.13

Em vendas à vista, uma loja oferece 5% de desconto; pagando-se com cheque pré-datado para um mês, não há cobrança de juros; em cheques pré-datados para dois meses, há um acréscimo de 3%. Qual é a melhor forma de pagamento, se o rendimento do dinheiro for de 3,5% a.m.?

Dados: $d = 5\%$, valor à vista = $0,95P$, valor a um mês = P , valor a dois meses = $1,03P$

- Cálculo da taxa de juros embutida

Pagamento a um mês: por equivalência de capitais, o valor presente do pagamento a um mês deve ser igual ao valor do pagamento à vista:

$$\frac{P}{1+i} = 0,95P \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{0,95} - 1 = 0,052632 = 5,2632\% \text{ a.m.}$$

Pagamento a dois meses: por equivalência de capitais, o valor presente do pagamento a dois meses deve ser igual ao valor do pagamento à vista:

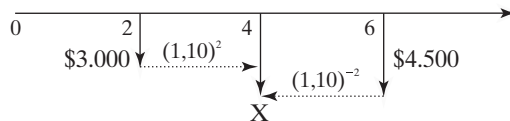
$$\frac{1,03P}{(1+i)^2} = 0,95P \quad \Rightarrow \quad i = \left(\frac{1,03}{0,95}\right)^{1/2} - 1 = 0,041254 = 4,1254\% \text{ a.m.}$$

A melhor forma de pagamento é à vista, já que o rendimento do dinheiro é menor que a taxa cobrada pela loja nas outras duas formas de pagamento possíveis.

► Exemplo 2.14

Uma pessoa tem uma dívida de \$3.000 com vencimento em dois anos e uma dívida de \$4.500 com vencimento em seis anos. Pretende quitar seus débitos por meio de um pagamento único a ser realizado ao final de quatro anos. Considerando uma taxa de juros composta de 10% a.a., determinar o valor do pagamento único que liquida a dívida.

Por equivalência de capitais, o valor do pagamento único deve ser igual ao valor atualizado (no quarto ano) do fluxo de caixa da primeira forma de pagamento:



$$X = \$3.000 \times (1,10)^2 + \$4.500 \times (1,10)^{-2} = \$7.349$$

► Exemplo 2.15

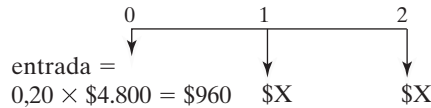
Uma pessoa dispõe de três formas de pagamento na compra de um bem. Na primeira forma, pagam-se à vista \$4.800; na segunda, pagam-se 20% de entrada e duas prestações mensais iguais e consecutivas, sendo a primeira para 30 dias; na terceira, o valor à vista é acrescido

de 30% e, desse valor majorado, 20% são pagos como entrada e o saldo é dividido em dois pagamentos mensais iguais sem juros, sendo o primeiro para 30 dias. Pede-se: **a)** a juros compostos de 20% a.m., calcular o valor das prestações mensais na segunda forma de pagamento; **b)** calcular a taxa de juros composta embutida na terceira forma de pagamento.

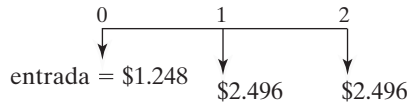
1ª forma de pagamento (à vista):



2ª forma de pagamento:



3ª forma de pagamento:



$$\text{Entrada} = (\$4.800 \times 1,3) \times 0,2 = \$1.248$$

$$\text{Prestação} = (\$4.800 \times 1,3 - \$1.248) / 2 = \$2.496$$

a) Por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo de caixa da segunda forma de pagamento:

$$\$4.800 = \$960 + \frac{X}{1,2} + \frac{X}{(1,2)^2} \Rightarrow X = \frac{\$3.840}{\frac{1}{1,2} + \frac{1}{(1,2)^2}} = \$2.513,46$$

Logo, na segunda forma de pagamento, pagam-se uma entrada de \$960 e duas parcelas de \$2.513,46 cada.

b) Por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo de caixa da terceira forma de pagamento:

$$\$4.800 = \$1.248 + \frac{\$2.496}{1+i} + \frac{\$2.496}{(1+i)^2} \Rightarrow i \cong 26,03\% \text{ a.m.}$$

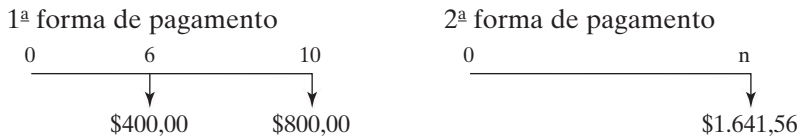
Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
4.800 (ENTER) 1.248 (-) (PV)	
2 (n)	
2.496 (CHS) (PMT)	
(i) → 26,03	

apaga a memória financeira
 insere o financiamento efetivo
 insere o número de pagamentos
 insere o valor dos pagamentos com sinal negativo
 calcula a taxa de juros

A taxa de juros pode também ser encontrada por aproximações sucessivas, interpolação linear ou fórmulas específicas (veja o Capítulo 5).

Exemplo 2.16

Um empréstimo foi contratado a juros compostos de 5% a.m. para ser quitado em dois pagamentos. O primeiro, de \$400, será pago ao fim de seis meses, e o segundo, de \$800, ao fim de dez meses; entretanto, o empréstimo pode ser liquidado por meio de um único pagamento de \$1.641,56. Determinar em que mês deve ser realizado esse pagamento para que a taxa de 5% a.m. seja mantida.



Podemos encontrar o prazo do pagamento único se considerarmos que, por equivalência de capitais, as duas formas de pagamento devem ter o mesmo valor presente:

$$\frac{\$400}{(1,05)^6} + \frac{\$800}{(1,05)^{10}} = \frac{\$1.641,56}{(1,05)^n} \Rightarrow (1,05)^n = 2,07893$$

Aplicando logaritmos:

$$n \times \log(1,05) = \log(2,07893) \Rightarrow n = \frac{\log(2,07893)}{\log(1,05)} = 15 \text{ meses}$$

Exemplo 2.17

Considerando juros compostos de 5% a.m., daqui a quantos dias deve ser feito um pagamento único de \$160.000, para liquidar uma dívida pela qual o devedor pagará três parcelas, a saber: \$50.000 no fim de seis meses, \$40.000 no fim de dez meses e \$80.000 no fim de 12 meses?

- Valor presente da dívida:

$$P = \frac{\$50.000}{(1,05)^6} + \frac{\$40.000}{(1,05)^{10}} + \frac{\$80.000}{(1,05)^{12}} = \$106.414,29$$

- Cálculo do prazo do pagamento único:

$$S = P(1 + i)^n$$

$$\$160.000 = \$106.414,29 \times (1,05)^n \Rightarrow (1,05)^n = 1,50356$$

$$\text{Aplicando logaritmos: } n = \frac{\log(1,50356)}{\log(1,05)} = 8,35894 \text{ meses (250 dias)}$$

Atenção: Veja o Exemplo 2.26 para um esclarecimento sobre o uso da HP 12c nesse tipo de problema.

► Exemplo 2.18

Uma compra pode ser paga à vista por \$1.400 ou financiada por meio de uma entrada de 30% e mais dois pagamentos mensais, o segundo 50% maior que o primeiro. Sabendo-se que o início dos pagamentos será ao término de um período de carência de quatro meses e que a taxa de juros aplicada é de 5% a.m., calcular o valor dos pagamentos mensais.



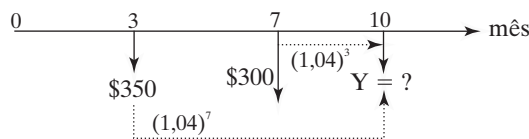
O valor de Y pode ser encontrado considerando-se que, pelo princípio de equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo de caixa da alternativa de compra financiada:

$$\$1.400 = \$420 + \frac{Y}{(1,05)^4} + \frac{1,5Y}{(1,05)^5} \Rightarrow Y = \frac{\$980}{[1/(1,05)^4 + 1,5/(1,05)^5]} = \$490,49$$

Logo, o primeiro pagamento será de \$490,49 e o segundo, de 735,74 ($1,5 \times \$490,49$).

► Exemplo 2.19

Uma pessoa tem uma dívida de \$1.000 que vence em dez meses e propõe-se a pagá-la em três parcelas: \$350 daqui a três meses, \$300 daqui a sete meses e uma parcela final no vencimento da dívida. A juros compostos de 4% a.m., determinar o valor da parcela final que liquida a dívida.

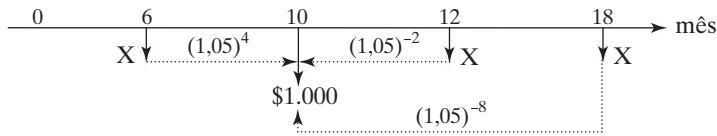


Por equivalência de capitais, no décimo mês, o valor da dívida deve ser igual ao valor das três parcelas atualizadas para aquela data:

$$\$1.000 = \$300 \times (1,04)^3 + \$350 \times (1,04)^7 + Y \Rightarrow Y = \$201,97$$

► Exemplo 2.20

Uma dívida de \$1.000 vence daqui a dez meses. Entretanto, o devedor propõe-se a dividi-la em três parcelas semestrais iguais. A juros compostos de 5% a.m., calcular o valor das parcelas.

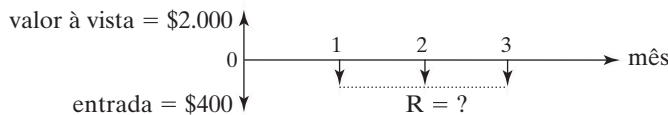


Por equivalência de capitais, no décimo mês, o valor da dívida deve ser igual à soma das parcelas avaliadas naquela data:

$$\$1.000 = X(1,05)^4 + \frac{X}{(1,05)^2} + \frac{X}{(1,05)^8} \Rightarrow X = \frac{\$1.000}{[(1,05)^4 + 1/(1,05)^2 + 1/(1,05)^8]} = \$357,22$$

► **Exemplo 2.21**

Um bem vale \$2.000 à vista. A prazo, paga-se uma entrada de 20% mais três mensalidades iguais e consecutivas. A juros compostos de 4% a.m., calcular o valor das mensalidades.



Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
1.600 (CHS) (PV)	insere o valor do principal com sinal negativo
4 (i)	insere a taxa de juros efetiva
3 (n)	insere o número de prestações
(PMT) → 576,56	calcula o valor da prestação mensal

O valor da mensalidade (R) pode ser encontrado considerando-se que o valor do financiamento efetivo deve ser igual ao valor presente (valor na data zero) das três mensalidades:

$$\begin{aligned} 2.000 - 400 &= R(1,04)^{-1} + R(1,04)^{-2} + R(1,04)^{-3} \\ 1.600 &= R \times [(1,04)^{-1} + (1,04)^{-2} + (1,04)^{-3}] \\ 1.600 &= R \times [2,775091] \Rightarrow R = 576,56 \end{aligned}$$

► **Exemplo 2.22**

Um capital de \$1.000, aplicado em 12 de fevereiro de 2010 a juros compostos de 0,2% ao dia, resultou em um montante de \$1.354,86 em 14 de julho de 2010. Determinar o prazo da aplicação em dias considerando o ano civil.

Dados: S = \$1.354,86, P = \$1.000, i = 0,2% a.d., n = ?

Calculadora HP 12c:	
(f) (REG)	
1.000 (CHS) (PV)	
1.354,86 (FV)	
0,2 (i)	
n → 152	

apaga a memória da calculadora
insere a aplicação com sinal negativo
insere o valor do montante
insere a taxa de juros efetiva ao dia
calcula o número de dias

$$S = P(1 + i)^n$$

$$\$1.354,86 = \$1.000 \times (1,002)^n \Rightarrow (1,002)^n = 1,35486$$

Aplicando logaritmos: $n \times \log 1,002 = \log 1,35486 \Rightarrow n = \frac{\log 1,35486}{\log 1,002} = 152$ dias

- a) Determinação do prazo usando a tábua para contagem de dias entre duas datas do ano civil (veja p. 10):

$$\begin{aligned} \text{número de dias da data posterior (14 de julho)} &= +195 \\ \text{número de dias da data anterior (12 de fevereiro)} &= \underline{-43} \\ \text{prazo:} &= 152 \end{aligned}$$

- b) Determinação do prazo utilizando as funções de calendário da HP 12c:

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
(g) (D.MY)	
12.022010 [ENTER]	
14.072010 (g) (ΔDYS) → 152	

apaga a memória financeira
define o modo de entrada das datas (dia/mês/ano)
insere a data inicial
insere a data final e calcula os dias entre as duas datas

Exemplo 2.23

Um capital de \$20.000, aplicado em 11 de abril de 2010 a juros compostos de 2% a.m., rendeu \$1.477,84 em determinado prazo. Calcular o prazo e a data de resgate da aplicação considerando o ano civil.

Dados: $S = \$21.477,84$, $P = \$20.000$, $i = 2\%$ a.m., $n = ?$, data = ?

$$S = P(1 + i)^n$$

$$\$21.477,84 = \$20.000 \times (1,02)^n \Rightarrow (1,02)^n = 1,073892$$

Aplicando logaritmos e destacando o prazo:

$$n \times \ln 1,02 = \ln 1,073892 \Rightarrow n = \frac{\ln 1,073892}{\ln 1,02} = 3,6 \text{ meses (108 dias)}$$

- a) Determinação da data de resgate da aplicação usando a tábua para contagem de dias entre duas datas do ano civil:

$$\begin{aligned} \text{número de dias da data posterior (?)} &= +Y \\ \text{número de dias da data anterior (11 de abril)} &= -101 \\ \text{prazo: } &108 \end{aligned}$$

Logo, $Y = 101 + 108 = 209$, o que na tábua corresponde ao dia 28 de julho.

b) Determinação da data de resgate utilizando as funções de calendário da HP 12c:

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
(g) (D.MY)	define o modo de entrada das datas (dia/mês/ano)
11.042010 [ENTER]	insere a data inicial
108 (g) (DATE)	insere o prazo e determina a data de vencimento
→ 28.072010 3	28 de julho de 2010, quarta-feira

O último dígito do resultado indica o dia da semana; 3 corresponde à quarta-feira.

Atenção: Na HP 12c, as funções de calendário podem manipular datas a partir de 15 de outubro de 1582 até 25 de outubro de 4046.

2.5 Cálculo com prazos fracionários

No cálculo financeiro a juros compostos, muitas vezes o prazo da aplicação não corresponde a um número inteiro de períodos a que se refere a taxa de juros, mas a um número fracionário. Nesse caso, geralmente admitem-se duas alternativas de cálculo: pela *convenção linear* e pela *convenção exponencial*.

- *Cálculo pela convenção linear*: os juros compostos são usados para a parte inteira do prazo, e os juros simples, para a parte fracionária do prazo.
- *Cálculo pela convenção exponencial*: os juros compostos são usados tanto para a parte inteira do prazo quanto para a parte fracionária do prazo.

Exemplos de aplicação

Exemplo 2.24

Para um capital de \$25.000, aplicado durante 77 dias a juros de 5% a.m., calcular o montante utilizando as convenções linear e exponencial.

Dados: $P = \$25.000$, $i = 5\%$ a.m., $n = 77$ dias (2 meses e 17 dias), $S = ?$

- Convenção linear

$$S = \$25.000 \times (1 + 0,05)^2 \times \left(1 + 0,05 \times \frac{17}{30}\right) = \$28.343,44$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
25.000 (CHS) (PV)	
5 (i)	
77 [ENTER] 30 (÷)(n)	
(FV) → 28.343,44	

apaga a memória financeira
 insere o principal com sinal negativo
 insere a taxa de juros mensal
 calcula e insere o prazo em meses
 calcula o montante

- Convenção exponencial

$$S = \$25.000 \times (1 + 0,05)^{77/30} = \$28.335,17$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
(STO) (EEX)	
25.000 (CHS)(PV)	
5 (i)	
77 [ENTER] 30 (÷)(n)	
(FV) → 28.335,17	

apaga a memória financeira
 permite uso de prazo fracionário (convenção exponencial)
 insere o valor do principal com sinal negativo
 insere a taxa de juros mensal
 calcula e insere o prazo em meses
 calcula o montante

Atenção: Para cálculos pela convenção exponencial, as teclas **(STO)(EEX)** devem ser pressionadas (a letra c aparece no visor); caso contrário, a máquina fará os cálculos pela convenção linear. Para apagá-la do visor, basta pressionar novamente as teclas **(STO)(EEX)**.

► Exemplo 2.25

Determinado capital, aplicado a juros efetivos de 40% a.a. durante quatro anos e 11 meses, resultou em um montante de \$10.000. Determinar o valor do capital.

Dados: $S = \$10.000$, $i = 40\%$ a.a., $n = 4$ anos e 11 meses (59 meses), $P = ?$

- Convenção linear:

$$P = \frac{\$10.000}{(1 + 0,40)^4 \times \left(1 + 0,40 \times \frac{11}{12}\right)} = \$1.904,69$$

- Convenção exponencial:

$$P = \frac{\$10.000}{(1 + 0,40)^{59/12}} = \$1.912,22$$

► Exemplo 2.26

Um capital de \$27.000 aplicado a juros de 6% a.m. rendeu \$5.654,80. Determinar o prazo da aplicação em meses.

Dados: $S = \$32.654,80$ ($\$27.000 + \$5.654,80$), $P = \$27.000$, $i = 6\%$ a.m., $n = ?$

- Convenção exponencial:

$$S = P(1 + i)^n$$

$$\$32.654,80 = \$27.000 \times (1,06)^n \Rightarrow (1,06)^n = 1,2094370$$

Aplicando logaritmos:

$$n \times \ln 1,06 = \ln 1,2094370 \Rightarrow n = \frac{\ln 1,2094370}{\ln 1,06} = 3,2634 \text{ meses}$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
27.000 (CHS) (PV)	insere o valor do principal com sinal negativo
6 (i)	insere a taxa de juros mensal
32.654,80 (FV)	insere o montante
(n) → 4	calcula o prazo em meses

Atenção: Se a incógnita do problema for o prazo da aplicação e se esse prazo for um número fracionário, a HP 12c arredondará sempre para o número inteiro superior. Nesse caso, pela convenção exponencial, deve-se necessariamente usar logaritmos para o cálculo do prazo correto.

- Convenção linear:

$$S = P(1 + i)^3(1 + i \times n)$$

$$32.654,80 = 27.000 \times (1,06)^3 \times (1 + 0,06 \times n) \Rightarrow n = 0,2578 \text{ mês}$$

Prazo: $3 + 0,2578 = 3,2578$ meses

A *convenção linear* admite juros compostos para a parte inteira do prazo e juros simples para a parte fracionária. Dessa forma, mistura regime de juros simples e compostos. Já a *convenção exponencial* emprega o regime de juros compostos para todo o prazo. O uso dessa convenção é mais comum na prática, sendo tecnicamente mais correto por utilizar unicamente juros compostos e taxas equivalentes para os períodos não inteiros.

Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios, considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias.

1. Calcular o montante de uma aplicação de \$3.500, pelas seguintes taxas de juros e prazos:
 - a) 4% a.m., 6 meses;
 - b) 8% a.t., 18 meses;
 - c) 12% a.a., 18 meses.
2. Em que prazo um capital de \$18.000 acumula um montante de \$83.743 à taxa de 15% a.m.?
3. Um investimento resultou em um montante de \$43.000 no prazo de três meses. Se a taxa de juros efetiva obtida for de 10% a.m., calcular o valor do investimento.

4. Uma empresa pretende comprar um equipamento de \$100.000 daqui a quatro anos, com o montante de uma aplicação financeira. Calcular o valor da aplicação necessária se as taxas de juros efetivas obtidas forem as seguintes:
a) 13% a.t. (ao trimestre) c) 14% a.s. (ao semestre)
b) 18% a.a. (ao ano) d) 12% a.m. (ao mês)
5. Um capital de \$51.879,31 aplicado por seis meses resultou em \$120.000. Qual é a taxa de juros efetiva obtida?
6. Uma pessoa deve pagar três prestações mensais iguais e consecutivas de \$3.500 cada, sendo a primeira para 30 dias. Se resolvesse quitar a dívida por meio de um pagamento único daqui a três meses, qual seria o valor desse pagamento, considerando uma taxa de juros efetiva de 5% a.m.?
7. Dispõe-se de duas formas de pagamento: a) pagamento à vista de \$1.400; b) dois cheques pré-datados de \$763,61 cada, para 30 e 60 dias, respectivamente. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada. Se o cliente obtiver 5% a.m. em suas aplicações financeiras, qual será a melhor opção de compra: à vista ou a prazo?
8. Na compra de um bem cujo valor à vista é \$140, deve-se pagar uma entrada mais duas prestações de \$80 no fim dos próximos dois meses. Considerando uma taxa de juros efetiva de 20% a.m., qual é o valor da entrada?
9. Uma casa é vendida por \$261.324,40 à vista. Se o comprador se propuser a pagar \$638.000 daqui a quatro meses, calcular a taxa de juros efetiva ao mês embutida na proposta.
10. Em quanto tempo triplica uma população que cresce à taxa composta de 3% a.a.?
11. A rentabilidade efetiva de um investimento é de 10% a.a. Se o rendimento foi de \$27.473 sobre um capital investido de \$83.000, quanto tempo o capital ficou aplicado?
12. Nas vendas a crédito, uma loja aumenta em 40% o valor sobre o preço à vista. Desse valor majorado, 20% são exigidos como entrada, e o restante é quitado em duas prestações mensais de \$1.058 cada, sendo a primeira para daqui a um mês. Se o valor à vista é de \$2.000, determinar a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.
13. Um produto, cujo preço à vista é de \$450, será pago em duas prestações mensais consecutivas, de \$280 e \$300, sendo a primeira para 30 dias. Se a taxa de juros embutida na primeira prestação for de 10% a.m., determinar a taxa embutida na segunda.
14. Um apartamento pode ser comprado à vista por \$320.000 ou pagando-se 20% de entrada mais duas prestações de \$170.000 cada, a primeira para três meses e a segunda para sete meses. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento. Se a taxa de juros vigente no mercado para aplicações financeiras for de 2% a.m., qual será a melhor opção de compra?
15. Certa loja tem como política de vendas a crédito exigir 20% do valor à vista como entrada e o restante a ser liquidado em três prestações mensais iguais, a primeira para 30 dias. Se a taxa de juros efetiva cobrada for de 15% a.m., determinar a percentagem do valor à vista a ser pago como prestação a cada mês.
16. Uma loja permite pagamentos em três prestações iguais. Se cada prestação for igual a um terço do valor à vista, sendo a primeira paga no ato da compra (antecipada), calcular a taxa de juros cobrada.
17. O valor à vista de um bem é de \$6.000. A prazo pagam-se uma entrada mais três parcelas mensais de \$2.000 cada, sendo a primeira para daqui a um mês. Calcular o valor da entrada, se a taxa de juros aplicada for de 7% a.m.
18. Por um equipamento de \$360.000 pagam-se uma entrada de 20% mais dois pagamentos mensais consecutivos. Se o primeiro pagamento for de \$180.000 e a taxa de juros efetiva aplicada for de 10% a.m., calcular o valor do segundo pagamento.

19. Pretende-se daqui a seis meses comprar um automóvel cujo valor é \$25.000. Calcular a aplicação necessária a ser efetuada hoje em um investimento que rende juros efetivos de 13% a.m., de modo que o veículo possa ser comprado *com os juros ganhos* na aplicação.
20. Um capital de \$50.000 rendeu \$1.000 em determinado prazo. Se o prazo fosse dois meses maior, *o rendimento aumentaria em \$2.060,40*. Calcular a taxa de juros efetiva ao mês obtida pela aplicação e o prazo em meses.
21. Dois capitais foram aplicados durante dois anos, o primeiro a juros efetivos de 2% a.m. e o segundo, a 1,5% a.m. O primeiro capital é \$10.000 maior que o segundo e seu rendimento excedeu em \$6.700 o rendimento do segundo capital. Calcular o valor de cada um dos capitais.
22. Dois capitais, o primeiro de \$2.400 e o segundo de \$1.800, foram aplicados por 40 e 32 dias, respectivamente. Se a taxa efetiva obtida pelo primeiro capital for de 5% a.m., e sabendo-se que esse capital rendeu \$100 a mais que o segundo, determinar a taxa mensal obtida pelo segundo capital.
23. Um capital foi aplicado por seis meses a juros efetivos de 15% a.a. Determinar o valor do capital sabendo-se que, se o montante ao término do prazo, diminuído da metade dos juros ganhos, fosse reaplicado à mesma taxa efetiva, renderia em três meses juros de \$18,42.
24. Certo capital transformou-se após quatro meses em \$850,85. Esse capital, diminuído dos juros ganhos nesse prazo, reduz-se a \$549,15. Calcular o capital e a taxa de juros efetiva ao mês obtida na aplicação.
25. Um capital foi aplicado a juros efetivos de 30% a.a. Depois de três anos, resgatou-se metade dos juros ganhos e, logo depois, o resto do montante foi reaplicado à taxa efetiva de 32% a.a., obtendo-se um rendimento de \$102,30 no prazo de um ano. Calcular o valor do capital inicialmente aplicado.
26. Um capital foi aplicado por 50 dias a juros efetivos de 3% a.m. Se a diferença entre o capital inicial e os juros ganhos fosse aplicada à mesma taxa, renderia em três meses juros de \$44,02. Determinar o valor do capital.
27. Um capital foi aplicado durante dez meses à taxa efetiva de 2% a.m. Ao término desse prazo, seu montante foi reaplicado durante 11 meses a 3% a.m. A que taxa mensal única poderia ser aplicado o capital durante todo esse tempo, de modo que resultasse no mesmo montante?
28. Um capital aplicado à taxa de 4% a.m. rendeu após um ano \$480,83 de juros. Do montante obtido, foram retirados \$600 e o saldo restante foi reaplicado à mesma taxa, resultando em um novo montante de \$1.226,15 depois de certo prazo. Determinar o valor do capital inicial e o prazo da reaplicação.
29. Dois capitais, o primeiro igual ao dobro do segundo, foram aplicados pelo mesmo prazo e à mesma taxa efetiva de 4% a.m. Sabendo que o primeiro capital ganhou \$400 de juros e que a soma do primeiro capital mais os juros ganhos pelo segundo totaliza \$1.032,91, calcular os capitais e o prazo da aplicação.
30. Dois capitais, o primeiro de \$1.000 e o segundo de \$227,27, foram aplicados a juros efetivos de 20% a.a. O primeiro capital, na metade do tempo do segundo, obteve um rendimento de \$100 a mais. Calcular os prazos das duas aplicações.
31. Um capital foi aplicado por dois anos a juros efetivos de 20% a.a. Ao término desse prazo, um terço dos juros ganhos foi reaplicado à taxa efetiva de 25% a.a., obtendo-se uma remuneração semestral de \$34,62. Calcular o valor do capital inicialmente aplicado.
32. Um capital foi aplicado durante 50 dias a juros efetivos de 3% a.m. Se a diferença entre o capital e os juros ganhos, acrescida de \$10.000, fosse aplicada à mesma taxa, renderia \$12.342,82 ao ano. Calcular o capital.

33. Uma pessoa tomou dois empréstimos. O primeiro por três meses, a juros efetivos de 5% a.m., e o segundo por dez meses, a 4% a.m. Sabendo que os juros pagos pelos dois empréstimos totalizam \$11.181,14 e que o primeiro empréstimo é igual à metade do segundo, calcular o valor total dos empréstimos.
34. Dois capitais, o primeiro igual ao triplo do segundo, foram aplicados, respectivamente, a taxas efetivas de 5% a.m. e 10% a.m. Determinar o prazo em que os montantes dos dois capitais se igualam.
35. Uma empresa tem duas dívidas: a primeira, de \$10.000, contratada a juros efetivos de 3% a.m., vence em 48 dias; e a segunda, de \$15.000, a juros efetivos de 4% a.m., vence em 63 dias. A empresa pretende liquidar as dívidas com o dinheiro proveniente do desconto financeiro de uma promissória com valor nominal de \$27.033, que vence em 90 dias. Calcular a taxa mensal efetiva aplicada pelo banco no desconto do título.
36. Em quanto tempo o rendimento gerado por um capital se iguala ao próprio capital, aplicando-se uma taxa efetiva de 5% a.m.?
37. Quanto tempo deve transcorrer para que a relação entre um capital de \$8.000, aplicado a juros efetivos de 4% a.m., e seu montante seja igual a 4/10?
38. Três dívidas, a primeira de \$2.000 vencendo em 30 dias, a segunda de \$1.000 vencendo em 60 dias e a terceira de \$3.000 vencendo em 90 dias, serão liquidadas por meio de um pagamento único de \$6.000. Se a taxa de juros efetiva aplicada for de 3% a.m., determinar em quanto tempo deve ser efetuado esse pagamento.
39. Quanto tempo deve transcorrer para que o montante de um capital de \$5.000 aplicado a juros efetivos de 6% a.m. se iguale ao montante de outro capital de \$8.000 aplicado à taxa efetiva de 4% a.m.?
40. Calcular o rendimento de um capital de \$7.000 aplicado à taxa efetiva de 1% a.m. no período compreendido entre 3 de abril e 6 de junho do mesmo ano. (Considerar o ano civil.)
41. Qual taxa de juros anual efetiva permite a duplicação de um capital no prazo de 42 meses?
42. Um capital de \$20.000 foi aplicado por 90 dias à taxa efetiva diária de 0,1% a.d. Determinar o rendimento obtido entre o 46º e o 87º dia.
43. Duas dívidas de \$20.000 e \$30.000 com vencimento em dois e quatro meses, respectivamente, serão liquidadas por meio de um único pagamento a ser efetuado em três meses. Considerando juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor desse pagamento.
44. Uma pessoa necessita dispor de \$20.000 daqui a oito meses. Para tanto, pretende efetuar duas aplicações em um fundo que rende juros efetivos de 3% a.m. A primeira aplicação, de \$10.000, foi efetuada hoje, e a segunda o será daqui a um mês. De quanto deverá ser essa segunda aplicação para que a pessoa possa dispor da quantia necessária ao término do oitavo mês?
45. Um empréstimo de \$5.000 contratado à taxa efetiva de 5% a.m. será liquidado por meio de cinco pagamentos mensais consecutivos, sendo o primeiro daqui a 30 dias. Se o valor de cada um dos quatro primeiros pagamentos for de \$1.000, determinar o valor do último pagamento.
46. Determinar o capital que, aplicado durante três meses à taxa efetiva composta de 4% a.m., produz um montante que excede em \$500 o montante que seria obtido se o mesmo capital fosse aplicado pelo mesmo prazo a juros simples de 4% a.m.
47. Um capital aplicado a determinada taxa de juros efetiva mensal rendeu, no prazo de dois anos, um valor igual a um quarto do próprio capital. Determinar essa taxa de juros.
48. Uma pessoa depositou \$1.000 em um fundo que paga juros efetivos de 5% a.m., com o objetivo de dispor de \$1.102,50 dentro de 60 dias. Passados 24 dias após a aplicação, a taxa efetiva baixou

para 4% a.m. Quanto tempo adicional, além dos 60 dias inicialmente previstos, ela terá de esperar para obter o capital requerido?

49. Um capital de \$4.000 foi dividido em duas parcelas e aplicado: a primeira parcela, à taxa efetiva de 6% a.t., e a segunda, a 2% a.m. Se após oito meses os montantes de ambas as parcelas se igualam, determinar o valor de cada uma.
50. Um capital aplicado em um fundo duplicou seu valor entre 11 de julho e 22 de dezembro do mesmo ano. A que taxa efetiva mensal foi aplicado? (Considerar o ano civil.)
51. Um financiamento de \$5.000 foi contratado a uma taxa efetiva de 12% a.t. Se foi liquidado após 60 dias, calcular o total de juros pagos pelo financiamento.
52. Determinar o valor dos juros pagos por um empréstimo de \$2.000 contratado a juros efetivos de 5% a.m. pelo prazo de 25 dias.
53. Um empréstimo de \$5.000 foi tomado a juros efetivos em 14 de abril e liquidado por \$5.850 em 28 de maio do mesmo ano. Determinar a taxa efetiva mensal contratada. (Considerar o ano civil.)

Taxas de juros

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Taxa nominal
- Taxa proporcional
- Taxas efetivas
- Equivalências entre taxas de juros
- Taxa *over*
- Taxa aparente e taxa real

Nesse capítulo, aprenderemos a distinguir as diferentes formas com que a taxa de juros se apresenta no mercado e a maneira de tratá-las no cálculo financeiro. A didática a ser utilizada será a mesma dos capítulos anteriores, ou seja, serão abordados alguns conceitos básicos seguidos de vários exemplos de aplicação.

3.1 Taxa de juros nominal

A taxa nominal é uma taxa referencial em que os juros são capitalizados (incorporados ao principal) mais de uma vez no período a que a taxa se refere. Para alguns autores, as taxas de juros devem ser classificadas como nominal ou efetiva, em função do capital tomado como base de cálculo. Desse modo, a taxa nominal é aquela calculada com base no valor nominal; se for conhecida, é a que incide sobre o valor nominal da aplicação ou do empréstimo. A taxa efetiva é a taxa calculada com base no valor efetivamente aplicado ou tomado emprestado, ou seja, com base no valor colocado à disposição do banco ou do cliente na data da aplicação ou do contrato de financiamento.

Para melhor entendimento, vamos supor que um empréstimo de \$30.000 será quitado por meio de um único pagamento de \$38.000 no prazo de um mês. No ato da contratação, foi paga uma tarifa de serviço bancário de 5% cobrada sobre o valor do empréstimo.

A taxa nominal é a razão entre os juros pagos e o valor nominal do empréstimo:

$$\text{taxa nominal} = \frac{\text{juros pagos}}{\text{empréstimo nominal}} = \frac{\$38.000 - \$30.000}{\$30.000} = 26,67\% \text{ a.m.}$$

A taxa efetiva é a razão entre os valores efetivamente pagos e o valor do empréstimo efetivamente liberado:

$$\text{taxa efetiva} = \frac{\text{valores efetivamente pagos}}{\text{empréstimo efetivo}} = \frac{(\$38.000 - \$30.000) + 0,05 \times \$30.000}{\$30.000 - 0,05 \times \$30.000} = 33,33\% \text{ a.m.}$$

Exemplos de taxas nominais:

- 18% ao ano capitalizada mensalmente;
- 8% ao semestre capitalizada mensalmente;
- operações de *overnight* em que a taxa de juros é mensal, com capitalizações diárias.

Nesses três exemplos, o prazo de capitalização dos juros (ou seja, o período de formação e incorporação dos juros ao principal) não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros. Logo, trata-se de taxas nominais.

3.1.1 Cálculo do montante a juros nominais

Considerando um capital aplicado a uma taxa de juros efetiva ao ano, em que os juros são capitalizados uma única vez ao ano, o montante ao término do primeiro ano de aplicação será:

$$S = P(1 + i)$$

Se a taxa de juros for nominal ao ano, capitalizada semestralmente (duas vezes por ano), o montante ao final de um ano será:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{2}\right)^{2 \times 1}$$

Se a taxa de juros for nominal ao ano, capitalizada mensalmente (12 vezes por ano), o valor do montante ao final do primeiro ano será:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12 \times 1}$$

Em geral, podemos expressar do seguinte modo o montante de um capital aplicado pelo prazo m a uma taxa nominal j com juros capitalizados k vezes durante o período referencial da taxa nominal:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

onde: j = taxa de juros nominal;

k = número de vezes em que os juros são capitalizados no período a que a taxa nominal se refere;

m = prazo da aplicação na mesma unidade de tempo da taxa nominal;

P = principal ou capital aplicado.

3.2 Taxa proporcional (taxa linear)

Muitas vezes, os juros praticados no sistema financeiro nacional e internacional encontram-se referenciados na taxa linear, da mesma forma que ocorre com a remuneração linear da caderneta de poupança, as taxas internacionais *libor* e *prime rate*, o desconto bancário, os juros da Tabela Price e as taxas do mercado interfinanceiro, entre outros. A taxa proporcional é determinada pela relação simples entre a taxa considerada na operação (taxa nominal) e o número de vezes em que ocorrem juros (quantidade de períodos de capitalização).

A taxa proporcional ao mês para uma taxa nominal de 18% a.a., capitalizada mensalmente, é de 1,5% a.m.:

$$\text{taxa proporcional} = \frac{j}{k} = \frac{18\% \text{ a.a.}}{12} = 1,5\% \text{ a.m.}$$

Nesse caso, o percentual de juros que incidirá sobre o capital a cada mês será 1,5%. A taxa proporcional de 6% a.m., para três meses, é de 18%; a de 24% a.a., para cinco meses, é de 10%; e assim sucessivamente, variando linearmente. Logo, as taxas proporcionais devem atender à seguinte proporção:

$$n_1 \times i_1 = n_2 \times i_2$$

onde n_1 e n_2 representam os prazos de cada taxa; e i_1 e i_2 correspondem aos percentuais das taxas consideradas.

A taxa proporcional não é um tipo de taxa de juros, é apenas uma característica do regime de juros simples. A taxa nominal pode ser proporcionalizada de modo que seja expressa em diferentes períodos. Entretanto, basicamente, o conceito de taxa proporcional somente é utilizado no regime de juros simples, no sentido de que o valor dos juros é proporcional apenas ao tempo.

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.1

Determinar as seguintes taxas proporcionais:

- a) 2,5% a.m. é proporcional a qual taxa anual? → $2,5\% \times 12 = 30\% \text{ a.a.}$
 b) 3% a.s. é proporcional a qual taxa anual? → $3\% \times 2 = 6\% \text{ a.a.}$
 c) 4% a.t. é proporcional a qual taxa anual? → $4\% \times 4 = 16\% \text{ a.a.}$
 d) 9% a.s. é proporcional a qual taxa trimestral? → $9\% \div 2 = 4,5\% \text{ a.t.}$

Exemplo 3.2

Calcular o montante resultante de um investimento de \$1.200 aplicado por três anos a juros nominais de 16% a.a., capitalizados mensalmente.

Dados: P = \$1.200, m = 3 anos, j = 16% a.a., k = 12, S = ?

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$1.200 \times \left(1 + \frac{0,16}{12} \right)^{12 \times 3} = \$1.933,15$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
1.200 (CHS) (PV)	
16 (g) (12 ÷)	
3 (g) (12 ×)	
(FV) → 1.933,15	

apaga a memória financeira
 valor do principal com sinal negativo
 taxa de juros por período de capitalização
 número de períodos de capitalização no prazo
 calcula o montante

O prazo m deve estar na mesma unidade de tempo da taxa nominal (em anos).

▶ Exemplo 3.3

Qual é o valor de resgate para um capital de \$200 aplicado pelos seguintes prazos e taxas?

a) 27 dias a 9% a.m., capitalizados diariamente ($j = 0,09$ a.m., $k = 30$, $m = 27/30$ meses)

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,09}{30} \right)^{30 \times (27/30)} = \$216,85$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
9 [ENTER] 30 (÷) (i)	
27 (n)	
200 (CHS) (PV)	
(FV) → 216,85	

apaga a memória financeira
 taxa de juros por período de capitalização
 número de dias do prazo
 principal com sinal negativo
 calcula o montante

O prazo dado foi transformado na mesma unidade de tempo da taxa nominal ($m = 27/30$ meses).

b) 6 meses a 28% a.a., capitalizados mensalmente ($j = 0,28$ a.a., $k = 12$, $m = 6/12$ anos)

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,28}{12} \right)^{12 \times (6/12)} = \$229,69$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
28 [ENTER] 12 (÷) (i)	
6 (n)	
200 (CHS) (PV)	
(FV) → 229,69	

apaga a memória financeira
 taxa de juros por período de capitalização
 número de meses do prazo
 principal com sinal negativo
 calcula o montante

O prazo dado foi transformado na mesma unidade de tempo da taxa nominal ($m = 6/12$ anos).

c) 8 meses a 18% a.s., capitalizados mensalmente ($j = 0,18$ a.s., $k = 6$, $m = 8/6$ semestres)

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,18}{6} \right)^{6 \times (8/6)} = \$253,35$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
18 [ENTER] 6 (÷) (i)	
8 (n)	
200 (CHS) (PV)	
(FV) → 253,35	

apaga a memória financeira
 taxa de juros por período de capitalização
 número de meses do prazo
 principal com sinal negativo
 calcula o montante

O prazo dado foi transformado na mesma unidade de tempo da taxa nominal ($m = 8/6$ semestres).

d) 27 meses a 12% a.t., capitalizados mensalmente ($j = 0,12$ a.t., $k = 3$, $m = 27/3$ trimestres)

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,12}{3} \right)^{3 \times (27/3)} = \$576,67$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
12 [ENTER] 3 (÷) (i)	
27 (n)	
200 (CHS) (PV)	
(FV) → 576,67	

apaga a memória financeira
 taxa de juros por período de capitalização
 número de meses do prazo
 principal com sinal negativo
 calcula o montante

O prazo dado foi transformado na mesma unidade de tempo da taxa nominal ($m = 27/3$ trimestres).

e) 7 meses a 28% a.a., capitalizados trimestralmente ($j = 0,28$ a.a., $k = 4$, $m = 7/12$ anos)

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,28}{4} \right)^{4 \times (7/12)} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,28}{4} \right)^2 = \$228,98$$

O expoente $k \times m$ é igual a 2,33. Contudo, no cálculo do montante foi considerada unicamente a parte inteira, pois, apesar de o prazo da operação ser de sete meses, haverá capitalização de juros por somente dois trimestres (seis meses). O prazo restante (0,33 trimestre), por não completar um período de capitalização (trimestre), não renderá juros.

► Exemplo 3.4

Calcular o *rendimento* de uma aplicação de \$4.000 pelo prazo de 217 dias a juros nominais de 12% a.s., capitalizados trimestralmente. Admita que a frequência de capitalização dos juros da aplicação coincide com a da taxa nominal.

Dados: $P = \$4.000$, $m = 217/180$ semestres, $j = 12\%$ a.s., $k = 2$, rendimento = ?

rendimento = montante – aplicação

$$\begin{aligned} &= P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} - P = \$4.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{2} \right)^{2 \times (217/180)} - \$4.000 \\ &= \$4.000 \times (1,06)^{2,41} - \$4.000 \\ &= \$4.000 \times (1,06)^2 - \$4.000 = \$494,40 \end{aligned}$$

No prazo de 217 dias, há somente dois períodos de capitalização completos (dois trimestres). Logo, no produto $k \times m$, que tem valor igual a 2,41, considera-se unicamente a parte inteira (dois trimestres). O prazo restante (0,41 trimestre), por não representar um período de capitalização completo, não renderá juros.

► Exemplo 3.5

Em quantos meses uma aplicação de \$4.000 a juros nominais de 12% a.s., capitalizados trimestralmente, tem um *rendimento mínimo* de \$2.000? Admita que a frequência de capitalização dos juros da aplicação coincide com a da taxa nominal.

Dados: $P = \$4.000$, $S = \$6.000$, $j = 12\%$ a.s., $k = 2$, $m = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m}$$

$$\$6.000 = \$4.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{2} \right)^{2 \times m} \Rightarrow (1,06)^{2m} = 1,50$$

Aplicando logaritmos: $m = \frac{\log 1,50}{2 \times \log 1,06} = 3,48$ semestres

O prazo m está na mesma unidade de tempo da taxa nominal (3,48 semestres), o que significa, em termos de períodos de capitalização, 6,96 trimestres ($3,48 \times 2$). Contudo, como o número de períodos de capitalização deve ser representado por um número inteiro, consideram-se sete períodos de capitalização (sete trimestres) como prazo mínimo para garantir a obtenção do *rendimento mínimo* esperado. Observe-se que, se arredondarmos para seis períodos de capitalização, o rendimento mínimo esperado não será alcançado.

► Exemplo 3.6

Um certificado de depósito bancário (CDB) prefixado rende 95% da taxa *over* do certificado de depósito interfinanceiro (CDI). Se em 60 dias de prazo da operação havia 48 dias úteis e a taxa média do CDI no período foi de 4,4% a.m., calcular o valor de resgate do CDB, considerando que o valor aplicado foi de \$4.500.

Dados: $j = 0,95 \times 4,4\% = 4,18\%$ a.m., $k = 30$, $P = \$4.500$, $m = 48/30$ meses, $S = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$4.500 \times \left(1 + \frac{0,0418}{30} \right)^{30 \times (48/30)} = \$4.811,03$$

O prazo foi convertido na mesma unidade de tempo da taxa nominal ($m = 48/30$ meses).

► Exemplo 3.7

Calcular a taxa nominal anual, capitalizada mensalmente, que produz um montante de \$1.933,15 a partir de um investimento de \$1.200 aplicado pelo prazo de três anos.

Dados: $S = \$1.933,15$, $P = \$1.200$, $m = 3$ anos, $k = 12$, $j = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m}$$

$$\$1.933,15 = \$1.200 \times \left(1 + \frac{j}{12} \right)^{12 \times 3}$$

$$\Rightarrow j = \left[\left(\frac{1.933,15}{1.200,00} \right)^{1/36} - 1 \right] \times 12 = 0,16 = 16\% \text{ a.a.}$$

► Exemplo 3.8

Um capital de \$15.000 é aplicado por 180 dias à taxa de 24% a.t., capitalizada mensalmente. Calcular o valor de resgate da aplicação.

Dados: $P = \$15.000$, $j = 24\% \text{ a.t.}$, $k = 3$, $m = 180/90$ trimestres, $S = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$15.000 \times \left(1 + \frac{0,24}{3} \right)^{3 \times (180/90)} = \$23.803,12$$

► Exemplo 3.9

Uma aplicação de \$1.000 foi efetuada em 17 de março de 2010, para ser resgatada em 24 de junho de 2011. Para uma taxa de juros nominal de 12% a.m., com capitalização diária, calcular o valor de resgate (considere ano civil).

Dados: $j = 12\% \text{ a.m.}$, $k = 30$, $P = \$1.000$, $m = 464/30$ (há 464 dias entre as duas datas), $S = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$1.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{30} \right)^{30 \times (464/30)} = \$6.374,45$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
12 [ENTER] 30 (÷) (i)	taxa de juros por período de capitalização
(g) (D.MY)	define o modo de entrada de datas (dia/mês/ano)
17,032010 [ENTER]	insere a data inicial
24,062011 (g) (ΔDYS) (n)	insere a data final e cálculo dos dias
1.000 (CHS) (PV)	insere o principal com sinal negativo
(FV) → 6.374,45	calcula o montante

Na HP 12c, o número exato de dias pode ser determinado utilizando-se as funções de calendário. A calculadora pode manipular datas a partir de 15 de outubro de 1582 a 25 de outubro de 4046.

► Exemplo 3.10

Uma aplicação de \$1.000 efetuada em 17 de março de 2010 rendeu \$296,26 de juros. Considerando uma taxa nominal de 12% a.m., com capitalização diária, determinar o prazo da aplicação em dias. Qual é a data de vencimento da aplicação considerando o ano civil?

Dados: $P = \$1.000$, $S = 1.296,26$, $j = 12\%$ a.m., $k = 30$, $m = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} \Rightarrow \$1.296,26 = \$1.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{30} \right)^{30 \times (m/30)} \Rightarrow (1,004)^m = 1,296260$$

Aplicando logaritmos: $m = \frac{\ln 1,296260}{\ln 1,004} = 65$ dias

Calculadora HP 12c:	
(f) (REG)	apaga todos os registros
(g) (D.MY)	define o modo de entrada das datas (dia/mês/ano)
17,032010 [ENTER]	insere a data inicial
65	insere o prazo da aplicação
(g) (DATE) → 21.05.2010 5	determina a data de vencimento (sexta-feira)

Na HP 12c, se a data a ser determinada estiver no passado, deve-se inserir o número de dias com sinal negativo. No resultado fornecido, o último dígito do visor da calculadora indica o dia da semana (1 = segunda-feira, 2 = terça-feira, ... , 7 = domingo).

Também se pode usar a tábua para contagem de dias entre duas datas (ver p. 10) para determinar a data de vencimento. Para tanto, deve-se subtrair, do número de dias correspondente à data posterior, o número de dias correspondente à data anterior:

$$\begin{aligned} \text{número de dias da data posterior (?)} &= +Y \\ \text{número de dias da data anterior (17 de março)} &= -76 \\ \text{dias:} &= 65 \end{aligned}$$

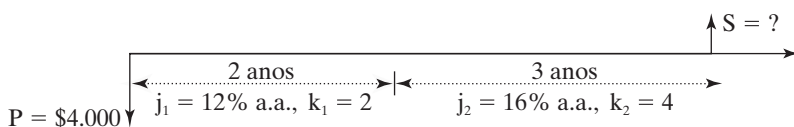
Como $Y - 76 = 65$, então $Y = 141$. Podemos observar na referida tábua que esse número corresponde ao dia 21 de maio. Logo, a data de vencimento da aplicação é 21 de maio de 2010.

► **Exemplo 3.11**

Uma pessoa aplicou \$4.000 por dois anos a juros nominais de 12% a.a., capitalizados semestralmente. Ao término desse prazo, reaplicou o montante por três anos à taxa de juros de 16% a.a., capitalizados trimestralmente. Calcular o valor de resgate da aplicação.

Dados: $P = \$4.000$, $j_1 = 12\%$ a.a., $k_1 = 2$, $m_1 = 2$ anos, $j_2 = 16\%$ a.a., $k_2 = 4$, $m_2 = 3$ anos, $S = ?$

$$\begin{aligned} S &= \left[P \left(1 + \frac{j_1}{k_1} \right)^{k_1 \times m_1} \right] \times \left(1 + \frac{j_2}{k_2} \right)^{k_2 \times m_2} \\ &= \left[\$4.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{2} \right)^{2 \times 2} \right] \times \left(1 + \frac{0,16}{4} \right)^{4 \times 3} = \$8.085,07 \end{aligned}$$



► Exemplo 3.12

Calcular o valor de um capital que, aplicado durante sete anos à taxa nominal de 84% a.a., com capitalização mensal, rendeu \$10.000 de juros.

Dados: $m = 7$ anos, rendimento = \$10.000, $j = 84\%$ a.a., $k = 12$, $P = ?$

rendimento = montante – aplicação

$$\$10.000 = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} - P$$

$$\$10.000 = P \left[\left(1 + \frac{0,84}{12} \right)^{12 \times 7} - 1 \right] \Rightarrow P = \frac{\$10.000}{(1,07)^{84} - 1} = \$34,14$$

► Exemplo 3.13

Em quantos meses um capital de \$5.000, aplicado a juros nominais de 120% a.a., capitalizados mensalmente, produz um montante de \$11.789,75?

Dados: $P = \$5.000$, $S = \$11.789,75$, $j = 120\%$ a.a., $k = 12$, $m = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m}$$

$$\$11.789,75 = \$5.000 \times \left(1 + \frac{1,20}{12} \right)^{12 \times m} \Rightarrow (1,10)^{12m} = 2,35795$$

Aplicando logaritmos: $m = \frac{\log 2,35795}{12 \times \log 1,10} = 0,75$ ano

O prazo m encontrado está na mesma unidade de tempo da taxa nominal (ano). Entretanto, podemos transformá-lo em meses: $0,75$ ano \times 12 meses / ano = 9 meses.

► Exemplo 3.14

Um capital de \$40.000 aplicado por 270 dias a determinada taxa nominal anual, capitalizada trimestralmente, rendeu \$1.800 de rendimento. Determinar a taxa nominal.

Dados: $P = \$40.000$, $m = 270/360$ anos, rendimento = \$1.800, $k = 4$, $j = ?$

rendimento = montante – aplicação

$$\$1.800 = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} - P$$

$$\$1.800 = \$40.000 \times \left[\left(1 + \frac{j}{4} \right)^{4 \times (270/360)} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow j = [(\$1.800/\$40.000 + 1)^{1/3} - 1] \times 4 = 5,9122\%$$

3.3 Taxa de juros efetiva

A taxa nominal é uma *taxa declarada* ou *taxa cotada* que não incorpora capitalizações, sendo necessário calcular a taxa efetiva equivalente quando pretendemos efetuar cálculos e comparações no regime de juros compostos.

Quando uma taxa de juros é nominal, admite-se que o prazo de capitalização dos juros (ou seja, período de formação e incorporação dos juros ao principal) não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros. Por exemplo, na taxa nominal de juros de 12% ao ano capitalizada mensalmente, os prazos não são coincidentes. O prazo de capitalização é de um mês, e o prazo a que se refere a taxa de juros é de um ano (12 meses). Assim, 12% representam uma taxa nominal expressa para um período inteiro (ano) que deve ser proporcionalizada ao período de capitalização (mês). No exemplo, a taxa proporcional por período de capitalização é de $12\%/12 = 1\%$ ao mês. Ao se capitalizar essa taxa nominal, apura-se uma taxa anual efetiva de juros superior àquela declarada para a operação. Vejamos:

- Taxa nominal anual = 12% a.a.
- Taxa proporcional ou efetiva por período de capitalização $(12\%/12) = 1\%$ a.m.
- Taxa efetiva anual $\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1$ = 12,68% a.a.

3.3.1 Cálculo da taxa efetiva anual a partir da taxa nominal

Se a taxa de juros for nominal, a taxa proporcional ou efetiva por período de capitalização poderá ser determinada dividindo-se a taxa nominal pela frequência de suas capitalizações:

$$i = \frac{j}{k}$$

O período da taxa obtida no passo anterior será o mesmo das capitalizações da taxa nominal. Por exemplo, se a taxa nominal de 24% a.a., capitalizada trimestralmente, for dividida pela frequência das capitalizações, a taxa resultante será uma taxa efetiva trimestral:

$$i_t = \frac{j}{k} = \frac{24\% \text{ a.a.}}{4} = 6\% \text{ ao trimestre}$$

Por fim, aplicando o processo de capitalização composta, pode-se calcular a taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada trimestralmente:

$$i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} - 1 = \left(1 + \frac{0,24}{4}\right)^{4 \times 1} - 1 = (1 + 0,06)^4 - 1 = 26,25\% \text{ a.a.}$$

Pode-se observar que a taxa efetiva i para n períodos de capitalização pode ser obtida a partir de uma taxa nominal j capitalizada k vezes, de acordo com a seguinte fórmula:

$$i = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^n - 1$$

Por exemplo, a taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 24% a.s., capitalizada mensalmente, é:

$$i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{0,24}{6}\right)^{12} - 1 = 60,10\% \text{ a.a.}$$

$n = 12$ significa que, no período referencial da taxa nominal (ano), há 12 capitalizações.

Se aplicarmos um capital P durante m anos a uma taxa efetiva anualizada i_a , o montante será:

$$S = P(1 + i_a)^m$$

Se o mesmo capital for aplicado pelo mesmo prazo a uma taxa nominal anual j , capitalizada k vezes, o montante será:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

Para serem equivalentes, as duas taxas (nominal e efetiva) devem resultar no mesmo montante. Igualando as expressões dos montantes, podemos destacar uma fórmula para o cálculo da taxa efetiva ao ano:

$$P(1 + i_a)^m = P\left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} - 1 \Rightarrow i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k - 1$$

onde: i_a = taxa efetiva ao ano;

j = taxa nominal ao ano;

k = número de capitalizações no período da taxa nominal.

Para que o leitor perceba como é importante trabalhar apenas com as taxas efetivas, suponhamos que tenham sido pesquisadas e encontradas as três taxas nominais a seguir:

- Banco A: 15% a.a., capitalizada diariamente;
- Banco B: 15,5% a.a., capitalizada trimestralmente;
- Banco C: 15,7% a.a., capitalizada semestralmente.

Qual dessas taxas será a melhor, caso você esteja pensando em fazer uma aplicação financeira?

Para começar, calculamos a seguir as taxas efetivas anuais equivalentes a essas taxas nominais declaradas:

$$\begin{aligned} i_a &= \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0,15}{360}\right)^{360} - 1 = 16,18\% \text{ a.a. (Banco A)} \\ &= \left(1 + \frac{0,155}{4}\right)^4 - 1 = 16,42\% \text{ a.a. (Banco B)} \\ &= \left(1 + \frac{0,157}{2}\right)^2 - 1 = 16,22\% \text{ a.a. (Banco C)} \end{aligned}$$

Esse exemplo ilustra dois pontos: primeiro, a taxa nominal mais alta (Banco C) não é necessariamente a melhor; segundo, o número de capitalizações durante o ano pode conduzir a uma diferença significativa entre a taxa nominal cotada e a taxa efetiva. Lembre-se de que é a taxa efetiva que você recebe ou paga.

A frequência das capitalizações de uma taxa nominal afeta o montante de uma aplicação, pois, quanto maior for essa frequência, maior será o montante final e maior será também a taxa efetiva obtida na operação.

Como ilustração, o quadro a seguir mostra, para diversas frequências das capitalizações da taxa nominal, os montantes e as taxas efetivas para um capital de \$100 aplicado por dois anos a uma taxa nominal de 10% a.a.:

Capitalização	Montante: $S = P(1 + j/k)^{k \times m}$	Taxa efetiva ao ano: $i_a = (1 + j/k)^k - 1$
anual (k = 1)	$\$100 \times (1 + 0,1/1)^{1 \times 2} = \$121,00$	$(1 + 0,1/1)^1 - 1 = 10,00\%$ a.a.
semestral (k = 2)	$\$100 \times (1 + 0,1/2)^{2 \times 2} = \$121,55$	$(1 + 0,1/2)^2 - 1 = 10,25\%$ a.a.
mensal (k = 12)	$\$100 \times (1 + 0,1/12)^{12 \times 2} = \$122,04$	$(1 + 0,1/12)^{12} - 1 = 10,47\%$ a.a.
diária (k = 360)	$\$100 \times (1 + 0,1/360)^{360 \times 2} = \$122,14$	$(1 + 0,1/360)^{360} - 1 = 10,52\%$ a.a.

Podemos observar que o montante aumenta à medida que a frequência das capitalizações da taxa nominal cresce. Igualmente, quanto maior for essa frequência, maior será a taxa efetiva implícita.

3.4 Equivalência entre taxas de juros efetivas

Pelo critério de juros simples, a taxa equivalente é a própria taxa proporcional. Assim, 2% a.t. é uma taxa proporcional (equivalente) a 8% a.a., pois:

$$4 \text{ trimestres} \times 2\% \text{ a.t.} = 8\% \text{ a.a.}$$

A importância da equivalência entre taxas de juros volta-se principalmente para as operações que referenciam suas taxas em juros compostos. Assim, duas taxas são ditas equivalentes quando, incidindo sobre um mesmo capital durante certo prazo, produzem montantes iguais pelo regime de capitalização composta.

Consideremos uma aplicação de \$1.000 pelo prazo de um ano. Se o capital for aplicado à taxa efetiva de 42,5761% a.a., ou à taxa efetiva de 3% a.m., o montante será o mesmo, dado que essas duas taxas são equivalentes.

- Montante de capital aplicado por um ano à taxa efetiva de 42,5761% a.a.:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\hspace{10em}}^{i_a = 42,5761\% \text{ a.a.}} \\
 \text{1 ano} \downarrow \\
 S = \$1.000 \times (1,425761)^1 = \$1.425,76
 \end{array}$$

- Montante de capital aplicado por 12 meses à taxa efetiva de 3% a.m.:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\hspace{10em}} \\
 \begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 \uparrow & & & & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & & & & i_m = 3\% \text{ a.m.}
 \end{array} \\
 S = \$1.000 \times (1,03)^{12} = \$1.425,76
 \end{array}$$

Constata-se que as taxas efetivas de 42,5761% a.a. e 3% a.m. são equivalentes, pois resultam no mesmo montante a partir do mesmo capital.

Na primeira ilustração anterior, ao se definir em 42,5761% a.a. o juro efetivo da operação, o percentual ao mês deverá, após os 12 períodos de capitalização no ano, produzir uma taxa acumulada (efetiva) de 42,5761%, ou seja:

Cálculo da taxa mensal equivalente:

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + i_a)$$

$$(1 + i_m)^{12} = (1,425761) \Rightarrow i_m = (1,425761)^{1/12} - 1 = 3\% \text{ a.m.}$$

Toda taxa de juros se encontra em determinado prazo. Entretanto, pode ser convertida para outro prazo qualquer sem alterar seu valor intrínseco, o que viabiliza o cálculo dos juros em operações e facilita comparações entre taxas de juros.

Assim, considerando-se o ano comercial (360 dias), a seguinte identidade nos permite relacionar por equivalência algumas taxas efetivas:

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}$$

Ao longo deste livro, usaremos a seguinte convenção para as taxas de juros efetivas:

i_a = taxa efetiva anual; i_s = taxa efetiva semestral;

i_t = taxa efetiva trimestral; i_b = taxa efetiva bimestral;

i_m = taxa efetiva mensal; i_d = taxa efetiva diária.

Quando passamos de uma unidade de tempo menor para uma maior, como de mês para ano, devemos elevar a taxa de juros pelo número de períodos correspondentes. No sentido contrário, por exemplo, de ano para mês, devemos elevar ao inverso do período. Veja a seguir as conversões necessárias:

de a.m. para a.a. $\Rightarrow i_a = (1 + i_m)^{12} - 1$	de a.d. para a.m. $\Rightarrow i_m = (1 + i_d)^{30} - 1$
de a.d. para a.a. $\Rightarrow i_a = (1 + i_d)^{360} - 1$	de a.a. para a.m. $\Rightarrow i_m = (1 + i_a)^{1/12} - 1$
de a.m. para a.d. $\Rightarrow i_d = (1 + i_m)^{1/30} - 1$	de a.a. para a.d. $\Rightarrow i_d = (1 + i_a)^{1/360} - 1$

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.15

Calcular as taxas efetivas anuais para as seguintes taxas nominais: 24% a.a., capitalizada mensalmente; 48% a.s., capitalizada mensalmente; e 60% a.t., capitalizada diariamente.

a) Cálculo da taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada mensalmente:

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} \Rightarrow i_a = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12 \times 1} - 1 = 26,82\% \text{ a.a.}$$

Em um ano, a unidade de tempo da taxa nominal (a.a.) é contida uma única vez. Logo, $m = 1$.

b) Cálculo da taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 48% a.s., capitalizada mensalmente:

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} \Rightarrow i_a = \left(1 + \frac{0,48}{6}\right)^{6 \times 2} - 1 = 151,82\% \text{ a.a.}$$

Em um ano, a unidade de tempo da taxa nominal (a.s.) é contida duas vezes. Logo, $m = 2$.

- c) Cálculo da taxa efetiva anual i_a , equivalente à taxa nominal de 60% a.t., capitalizada diariamente:

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} \Rightarrow i_a = \left(1 + \frac{0,60}{90}\right)^{90 \times 4} - 1 = 993,57\% \text{ a.a.}$$

Em um ano, a unidade de tempo da taxa nominal (a.t.) é contida quatro vezes. Logo, $m = 4$.

► Exemplo 3.16

Qual é a taxa nominal anual, capitalizada semestralmente, equivalente à taxa efetiva de 40% a.a.?

Dados: $i_a = 40\% \text{ a.a.}$, $k = 2$, $m = 1$, $j = ?$

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$1,40 = \left(1 + \frac{j}{2}\right)^{2 \times 1} \Rightarrow j = 36,64\% \text{ a.a.}$$

► Exemplo 3.17

Os juros reais da caderneta de poupança são de 6% a.a., com capitalizações mensais. Qual é a taxa efetiva ao ano?

Dados: $j = 6\% \text{ a.a.}$, $k = 12$, $m = 1$, $i_a = ?$

$$i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} - 1 = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 = 0,06167781 = 6,167781\% \text{ a.a.}$$

► Exemplo 3.18

Calcular a taxa nominal anual, capitalizada trimestralmente, equivalente à taxa nominal de 120% a.a., capitalizada mensalmente.

Dados: $j = 120\% \text{ a.a.}$, $k = 12$, $j = \% \text{ a.a.}$?, $k = 4$, $m = 1$

- a) Dividindo-se a taxa nominal de 120% a.a. pela frequência das capitalizações (12 capitalizações), obtém-se o fator mensal:

$$(1 + i_m) = \left(1 + \frac{1,20}{12}\right) = 1,10$$

- b) Dividindo-se a taxa nominal anual pedida pela frequência das capitalizações (quatro capitalizações), obtém-se o fator trimestral:

$$(1 + i_t) = \left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

c) Relacionando-se o fator trimestral com o fator mensal, pode-se destacar a taxa nominal pedida:

$$(1 + i_t) = (1 + i_m)^3$$

$$\left(1 + \frac{j}{4}\right) = (1,10)^3 \Rightarrow j = [(1,10)^3 - 1] \times 4 = 132,40\% \text{ a.a.}$$

▶ Exemplo 3.19

Verificar se a taxa nominal de 120% a.a., capitalizada mensalmente, é equivalente à taxa efetiva de 213,84% a.a. Se ficar demonstrada a equivalência, provar que o montante produzido por uma aplicação financeira de \$1.000, durante dois anos, a essas duas taxas é o mesmo.

Dados: $j = 120\% \text{ a.a.}$, $k = 12 \cong i_a = 213,84\% \text{ a.a.}$, prazo = 2 anos, $P = \$1.000$, $S = ?$

a) Taxa efetiva anual:

$$i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{1,2}{12}\right)^{12} - 1 = 213,84\% \text{ a.a.}$$

b) Montante à taxa nominal de 120% a.a., capitalizada mensalmente:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} = \$1.000 \times \left(1 + \frac{1,20}{12}\right)^{12 \times 2} = \$9.849,56$$

c) Montante à taxa efetiva de 213,84% a.a.:

$$S = P(1 + i_a)^m = \$1.000 \times (1 + 2,1384)^2 = \$9.849,56$$

Verifica-se que as duas taxas são equivalentes, pois resultam no mesmo montante.

▶ Exemplo 3.20

Um investidor dispõe das seguintes alternativas de investimento: aplicar à taxa nominal de 48% a.a., com capitalizações mensais, ou à taxa de 50% a.a., com capitalizações semestrais. Qual alternativa representa a melhor aplicação?

Dados: $j = 48\% \text{ a.a.}$, $50\% \text{ a.a.}$, $k = 12$, 2 , $m = 1$, $i_a = ?$

a) Taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 48% a.a., capitalizada mensalmente ($m = 1$, $k = 12$):

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$i_a = \left(1 + \frac{0,48}{12}\right)^{12} - 1 = 60,10\% \text{ a.a.}$$

b) Taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 50% a.a., capitalizada semestralmente ($m = 1$, $k = 2$):

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$i_a = \left(1 + \frac{0,50}{2}\right)^2 - 1 = 56,25\% \text{ a.a.}$$

A primeira alternativa representa a maior taxa efetiva anual. Portanto, deve ser a taxa escolhida.

Exemplo 3.21

Serão investidos \$1.000 por um ano à taxa nominal de 50% a.a. Determinar a periodicidade da capitalização dos juros que representa o maior montante e a maior taxa efetiva anual.

Dados: $P = \$1.000$, $j = 50\% \text{ a.a.}$, $m = 1$, $k = 1, 12, 360$, $i_a = ?$

Investimento P	Frequência da capitalização K	Montante $S = P(1 + j/k)^{k \times m}$	Taxa efetiva ao ano $i_a = (1 + j/k)^k - 1$
\$1.000	Anual (k = 1)	\$1.000 $(1 + 0,5)^{1 \times 1} = \1.500	$(1 + 0,5) - 1 = 50,00\% \text{ a.a.}$
\$1.000	Mensal (k = 12)	\$1.000 $(1 + 0,5/12)^{12 \times 1} = \1.632	$(1 + 0,5/12)^{12} - 1 = 63,21\% \text{ a.a.}$
\$1.000	Diária (k = 360)	\$1.000 $(1 + 0,5/360)^{360 \times 1} = \1.648	$(1 + 0,5/360)^{360} - 1 = 64,82\% \text{ a.a.}$

Esse quadro mostra que a capitalização diária produz o maior montante e a maior taxa efetiva anual; há um aumento destes com o aumento da frequência das capitalizações da taxa nominal.

Exemplo 3.22

Calcular a taxa nominal ao ano equivalente a uma taxa efetiva de 10% a.a. nos seguintes casos de capitalização dos juros da taxa nominal: capitalização mensal, trimestral e semestral.

Dados: $i_a = 10\% \text{ a.a.}$, $k = 12, 4, 2$, $j = ?$

Capitalização dos juros K	Taxa nominal ao ano $j = [(1 + i_a)^{1/k} - 1] \times k$
Mensal (k = 12)	$j = [(1 + 0,10)^{1/12} - 1] \times 12 = 9,57\% \text{ a.a.}$
Trimestral (k = 4)	$j = [(1 + 0,10)^{1/4} - 1] \times 4 = 9,65\% \text{ a.a.}$
Semestral (k = 2)	$j = [(1 + 0,10)^{1/2} - 1] \times 2 = 9,76\% \text{ a.a.}$

Exemplo 3.23

Calcular a taxa efetiva mensal equivalente à taxa efetiva de 30% a.a. Verificar a equivalência.

Dados: $i_a = 30\% \text{ a.a.}$, $i_m = ?$

Taxa efetiva ao mês:

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$$

$$(1 + 0,30) = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow i_m = (1,30)^{1/12} - 1 = 0,02210 = 2,21\% \text{ a.m.}$$

- a) Montante devido a um capital de \$10.000, aplicado durante 12 meses à taxa efetiva de 2,21% a.m.:

$$S = \$10.000 \times (1,0221)^{12} = \$13.000$$

- b) Montante devido a um capital de \$10.000, aplicado durante um ano à taxa efetiva de 30% a.a.:

$$S = \$10.000 \times 1,30 = \$13.000$$

Por produzirem o mesmo montante no mesmo prazo, verifica-se que as duas taxas efetivas, 30% a.a. e 2,21% a.m., são equivalentes. Portanto, obteríamos o mesmo resultado financeiro se aplicássemos por um ano um capital a uma taxa efetiva de 2,21% a.m. ou a uma taxa efetiva de 30% a.a.

▶ Exemplo 3.24

Uma aplicação de \$4.500 em CDB é resgatada por \$4.860 no prazo de dois meses. Calcular a taxa de juros efetiva anual obtida na aplicação.

Dados: $P = \$4.500$, $S = \$4.860$, $n = 2$ meses, $i_a = ?$

- Fator de juros efetivos ao mês:

$$S = P(1 + i_m)^n$$

$$\$4.860 = \$4.500 \times (1 + i_m)^2 \Rightarrow (1 + i_m) = \left(\frac{4.860}{4.500}\right)^{1/2} = (1,08)^{1/2}$$

- Capitalizando 12 vezes o fator de juros efetivos ao mês:

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow i_a = (1,08)^{12/2} - 1 = 58,69\% \text{ a.a.}$$

▶ Exemplo 3.25

Um banco cobra juros efetivos de 20% a.a. Quanto cobrará em 150 dias?

Dados: $i_a = 20\% \text{ a.a.}$, $i_{150d} = ?$

- Fator de juros efetivos ao dia:

$$(1 + i_a) = (1 + i_d)^{360}$$

$$(1,20) = (1 + i_d)^{360} \Rightarrow (1 + i_d) = (1,20)^{1/360}$$

Para calcular a taxa efetiva no período de 150 dias, capitalizamos 150 vezes o fator de juros ao dia:

$$(1 + i_{150d}) = [1 + i_d]^{150}$$

$$(1 + i_{150d}) = [(1,20)^{1/360}]^{150} \Rightarrow i_{150d} = (1,20)^{150/360} - 1 = 0,07893 = 7,89\%$$

$$i_{150d} = \text{taxa efetiva para 150 dias}$$

► **Exemplo 3.26**

A partir da taxa nominal de 4% a.m., capitalizada diariamente, calcular a taxa efetiva anual e a taxa efetiva para um período de 43 dias.

Dados: $j = 4\%$ a.m., $k = 30$, $i_a = ?$, $i_{43d} = ?$

a) Cálculo da taxa efetiva anual:

Dividindo a taxa nominal por 30, obtemos o fator de juros ao dia: $(1 + i_d) = \left(1 + \frac{0,04}{30}\right)$

Para calcular a taxa efetiva ao ano, basta capitalizar 360 vezes o fator de juros ao dia:

$$i_a = \left(1 + \frac{0,04}{30}\right)^{360} - 1 = 61,56\% \text{ a.a.}$$

b) Cálculo da taxa efetiva no período de 43 dias:

Para calcular a taxa efetiva em 43 dias, capitalizaremos 43 vezes o fator de juros ao dia:

$$i_{43d} = \left(1 + \frac{0,04}{30}\right)^{43} - 1 = 5,8968\% \text{ em 43 dias}$$

$$i_{43d} = \text{taxa efetiva para 43 dias}$$

► **Exemplo 3.27**

Em 120 dias, uma aplicação rendeu uma taxa efetiva de 124%. Calcular as taxas efetivas (mensal e anual), equivalentes a esse rendimento.

Dados: $i_{120d} = 124\%$, $i_m = ?$, $i_a = ?$

• Fator de juros efetivos ao dia:

$$(1 + i_{120d}) = (1 + i_d)^{120}$$

$$(1 + 1,24) = (1 + i_d)^{120} \Rightarrow (1 + i_d) = (2,24)^{1/120}$$

$$i_{120d} = \text{taxa efetiva para 120 dias}$$

a) Para calcular a taxa efetiva mensal, basta capitalizar 30 vezes o fator de juros ao dia:

$$(1 + i_m) = [(1 + i_d)]^{30} \Rightarrow i_m = [(2,24)^{1/120}]^{30} - 1 = (2,24)^{30/120} - 1 = 22,34\% \text{ a.m.}$$

b) Para calcular a taxa efetiva anual, basta capitalizar 360 vezes o fator de juros ao dia:

$$(1 + i_a) = (1 + i_d)^{360} \Rightarrow i_a = [(2,24)^{1/120}]^{360} - 1 = (2,24)^{360/120} - 1 = 1.023,94\% \text{ a.a.}$$

► **Exemplo 3.28**

Um capital obteve juros efetivos de 4,5% no prazo de 13 dias. Calcular a taxa nominal ao mês, capitalizada diariamente, equivalente à taxa efetiva obtida. Verificar a equivalência das taxas.

Dados: $i_{13d} = 4,5\%$, $m = 13/30$ meses, $n = 13$ dias, $k = 30$, $j = ?$ a.m.

- A divisão da taxa nominal mensal pela frequência das capitalizações (diária) resulta em uma taxa efetiva ao dia:

$$(1 + i_d) = \left(1 + \frac{j}{30}\right)$$

- A taxa efetiva em 13 dias pode ser calculada capitalizando-se 13 vezes o fator de juros efetivo ao dia:

$$(1 + i_{13d}) = \left(1 + \frac{j}{30}\right)^{13}$$

$$(1 + 0,045) = \left(1 + \frac{j}{30}\right)^{13} \Rightarrow j = [(1,045)^{1/13} - 1] \times 30$$

$$= 10,18\% \text{ a.m. capitalizada diariamente}$$

- Montante devido ao capital de \$1.000, aplicado durante 13 dias à taxa efetiva de 4,5%, no prazo:

$$S = \$1.000 \times (1,045) = \$1.045$$

- Montante devido ao capital de \$1.000, aplicado durante 13 dias à taxa nominal de 10,18% a.m., capitalizada diariamente:

$$S = \$1.000 \times \left(1 + \frac{0,1018}{30}\right)^{30 \times (13/30)} = \$1.045$$

Verifica-se que as duas taxas efetivas são equivalentes, pois produzem o mesmo montante quando aplicadas sobre o mesmo capital e pelo mesmo prazo.

► **Exemplo 3.29**

Um capital de \$1.000 foi investido em renda fixa prefixada por 61 dias a uma taxa efetiva bruta de 28% a.a. Sabendo-se que a alíquota de IR é de 15% sobre os rendimentos, calcular o ganho líquido da aplicação e a taxa de rendimento líquida efetiva ao mês.

Dados: $P = \$1.000$, $i_a = 28\%$ a.a., $n = 61$ dias, $IR = 15\%$, $i_m = ?$

- a) Rendimento efetivo em 61 dias:

rendimento efetivo = montante – aplicação – imposto de renda

$$= \$1.000 (1,28)^{61/360} - \$1.000 - 0,15 \times [\$1.000 (1,28)^{61/360} - \$1.000] = \$36,31$$

b) Taxa de rendimento efetivo mensal:

$$i_m = \left(1 + \frac{\$36,31}{\$1.000}\right)^{30/61} - 1 = 1,7695\% \text{ a.m.}$$

► Exemplo 3.30

Determinar as seguintes equivalências entre taxas efetivas:

a) Taxa bimestral equivalente à taxa semestral de 35%:

$$(1 + i_b)^3 = (1 + i_s) \Rightarrow i_b = (1,35)^{1/3} - 1 = 10,52\% \text{ a.b.}$$

b) Taxa semestral equivalente à taxa mensal de 5%:

$$(1 + i_s) = (1 + i_m)^6 \Rightarrow i_s = (1,05)^6 - 1 = 34,01\% \text{ a.s.}$$

c) Taxa diária equivalente à taxa trimestral de 90%:

$$(1 + i_d)^{90} = (1 + i_t) \Rightarrow i_d = (1,90)^{1/90} - 1 = 0,7157\% \text{ a.d.}$$

d) Taxa anual equivalente à taxa diária de 0,5%:

$$(1 + i_a) = (1 + i_d)^{360} \Rightarrow i_a = (1,005)^{360} - 1 = 502,26\% \text{ a.a.}$$

e) Taxa bimestral equivalente à taxa de 35% em 45 dias:

$$(1 + i_d)^{45} = (1 + i_{45d}) \Rightarrow (1 + i_d) = (1,35)^{1/45}$$

$$(1 + i_b) = (1 + i_d)^{60} \Rightarrow i_b = (1,35)^{60/45} - 1 = 49,20\% \text{ a.b.}$$

► Exemplo 3.31

Calcular a taxa efetiva anual equivalente a uma taxa nominal de 40% a.a. para as seguintes periodicidades de capitalização da taxa nominal: diária, mensal, semestral e anual.

Dados: $j = 40\% \text{ a.a.}$, $m = 1$, $k = 360, 12, 4, 2, 1$, $i_a = ?$

Capitalização	Taxa efetiva anual: $i_a = (1 + j/k)^k - 1$
Diária ($k = 360$)	$i_a = (1 + 0,40/360)^{360} - 1 = 49,15\%$
Mensal ($k = 12$)	$i_a = (1 + 0,40/12)^{12} - 1 = 48,21\%$
Semestral ($k = 2$)	$i_a = (1 + 0,40/2)^2 - 1 = 44,00\%$
Anual ($k = 1$)	$i_a = (1 + 0,40)^1 - 1 = 40,00\%$

Como podemos observar no quadro, operações com pagamento de juros a intervalos mais curtos têm uma taxa efetiva mais elevada do que operações com pagamentos mais espaçados.

► Exemplo 3.32

Determinar:

a) A taxa efetiva anual equivalente a uma taxa quinzenal efetiva de 2%:

$$(1 + i_a) = (1 + i_q)^{24} \Rightarrow i_a = (1 + 0,02)^{24} - 1 = 0,60844 = 60,84\% \text{ a.a.}$$

ano comercial = 24 quinzenas

b) A taxa efetiva trimestral equivalente à taxa efetiva de 40% em dois anos:

$$(1 + i_{2a}) = (1 + i_t)^8 \Rightarrow i_t = (1,40)^{1/8} - 1 = 4,30\% \text{ a.t.}$$

2 anos comerciais = 8 trimestres

c) A taxa efetiva para 21 dias equivalente à taxa efetiva de 17% ao trimestre:

• Fator de juros efetivo ao dia: $(1 + i_d)^{90} = (1 + i_t) \Rightarrow (1 + i_d) = (1,17)^{1/90}$

Capitalizando por 21 dias o fator de juros ao dia:

$$(1 + i_{21d}) = [(1 + i_d)]^{21} \\ \Rightarrow i_{21d} = [(1,17)^{1/90}]^{21} - 1 = (1,17)^{21/90} - 1 = 3,73\% \text{ em 21 dias}$$

► Exemplo 3.33

Determinar:

a) Taxa efetiva para 11 meses equivalente à taxa nominal de 72% a.a., capitalizada mensalmente:

• Fator efetivo mensal: $(1 + i_m) = \left(1 + \frac{0,72}{12}\right) = (1,06)$

A taxa efetiva para 11 meses é calculada capitalizando-se 11 vezes a taxa efetiva mensal:

$$(1 + i_{11m}) = (1,06)^{11} \Rightarrow i_{11m} = (1,06)^{11} - 1 = 0,898299 = 89,8299\% \text{ em 11 meses}$$

b) Taxa efetiva para 270 dias, equivalente à taxa nominal de 48% a.a., capitalizada trimestralmente:

• Fator efetivo trimestral: $(1 + i_t) = \left(1 + \frac{0,48}{4}\right) = (1,12)$

Para calcular a taxa efetiva em 270 dias, capitalizamos a taxa efetiva trimestral três vezes:

$$(1 + i_{270d}) = (1,12)^3 \Rightarrow i_{270d} = (1,12)^3 - 1 = 40,49\% \text{ em 270 dias}$$

c) Taxa nominal anual, capitalizada semestralmente, equivalente à taxa efetiva de 12% em 540 dias:

• Fator efetivo semestral: $(1 + i_s) = \left(1 + \frac{j}{2}\right)$

A taxa efetiva para 540 dias é igual à taxa efetiva semestral capitalizada três vezes:

$$1 + i_{540d} = \left(1 + \frac{j}{2}\right)^3$$

Substituindo a taxa efetiva para 540 dias na expressão anterior, podemos destacar a taxa nominal:

$$1,12 = \left(1 + \frac{j}{2}\right)^3 \Rightarrow j = [(1,12)^{1/3} - 1] \times 2 = 7,6998\% \text{ a.a., capitalizada semestralmente}$$

d) Taxa nominal anual capitalizada mensalmente, equivalente à taxa efetiva de 19% a.t.:

- Fator efetivo mensal: $(1 + i_m) = \left(1 + \frac{j}{12}\right)$

Por meio de uma relação de equivalência entre o fator trimestral e o fator mensal, podemos destacar a taxa nominal pedida:

$$\begin{aligned} (1 + i_t) &= (1 + i_m)^3 \\ (1 + 0,19) &= \left(1 + \frac{j}{12}\right)^3 \Rightarrow j = [(1,19)^{1/3} - 1] \times 12 \\ &= 71,64\% \text{ a.a., capitalizada mensalmente} \end{aligned}$$

e) Taxa efetiva anual, equivalente à taxa nominal de 32% a.a., capitalizada trimestralmente:

- Fator efetivo trimestral: $(1 + i_t) = \left(1 + \frac{0,32}{4}\right) = (1,08)$

A taxa efetiva anual é calculada capitalizando-se quatro vezes a taxa efetiva trimestral:

$$(1 + i_a) = (1,08)^4 \Rightarrow i_a = (1,08)^4 - 1 = 36,0489\% \text{ a.a.}$$

f) Taxa efetiva trimestral, equivalente à taxa nominal de 18% a.s., capitalizada mensalmente:

- Fator efetivo mensal: $(1 + i_m) = \left(1 + \frac{0,18}{6}\right) = 1,03$

Taxa efetiva trimestral: $(1 + i_t) = (1,03)^3 \Rightarrow i_t = (1,03)^3 - 1 = 9,2727\% \text{ a.t.}$

► Exemplo 3.34

Dada a taxa de juros nominal de 24% a.a., capitalizada trimestralmente, determinar a taxa nominal anual, capitalizada semestralmente, equivalente.

- Dividindo-se a taxa nominal de 24% a.a. pela frequência das capitalizações (quatro), obtém-se o fator efetivo trimestral:

$$(1 + i_t) = \left(1 + \frac{0,24}{4}\right) = 1,06$$

- Dividindo-se a taxa nominal anual pedida pela frequência das capitalizações (dois), obtém-se o fator efetivo semestral:

$$(1 + i_s) = \left(1 + \frac{j}{2}\right)$$

- Relacionando-se o fator efetivo semestral com o fator efetivo trimestral, podemos destacar a taxa nominal pedida:

$$(1 + i_s) = (1 + i_t)^2$$

$$\left(1 + \frac{j}{2}\right) = (1,06)^2 \Rightarrow j = [(1,06)^2 - 1] \times 2 = 24,72\% \text{ a.a.}$$

▶ Exemplo 3.35

Um capital de \$2.000 ficou aplicado durante 245 dias à taxa nominal de 36% a.a., capitalizada mensalmente. Determinar a taxa de rentabilidade efetiva mensal, admitindo-se que a frequência de capitalização dos juros do investimento coincide com a da taxa nominal.

Dados: $P = \$2.000$, $n = 245$ dias, $j = 36\%$ a.a., $k = 12$, $i_m = ?$

$$\text{Rendimento efetivo} = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} - P = \$2.000 \times \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{\overbrace{12 \times (245/360)}^{8,17}} - \$2.000$$

$$= \$2.000 \times (1,03)^8 - \$2.000 = \$533,54$$

$$\text{Taxa efetiva mensal: } i_m = \left(1 + \frac{\$533,54}{\$2.000}\right)^{30/245} - 1 = 2,9379\% \text{ a.m.}$$

No prazo de 245 dias, há unicamente oito períodos inteiros de capitalização (oito meses). Portanto, desconsidera-se a parte decimal do produto $k \times m$.

▶ Exemplo 3.36

Um empréstimo de \$3.000 será liquidado por meio de um único pagamento de \$3.500 no prazo de 15 meses. Sabendo que no ato da contratação foi paga uma ‘comissão’ de 15% sobre o valor emprestado, determinar a taxa nominal e efetiva no prazo, bem como a taxa efetiva mensal.

$$\text{Taxa nominal no prazo} = \frac{\text{juros pagos}}{\text{empréstimo nominal}}$$

$$= \frac{\$3.500 - \$3.000}{\$3.000} = 16,67\% \text{ em 15 meses}$$

$$\text{Taxa efetiva no prazo} = \frac{\text{valores efetivamente pagos}}{\text{empréstimo efetivo}}$$

$$= \frac{(\$3.500 - \$3.000) + 0,15 \times \$3.000}{\$3.000 - 0,15 \times \$3.000} = 37,26\% \text{ em 15 meses}$$

$$\text{Taxa efetiva mensal: } i_m = (1,3726)^{1/15} - 1 = 2,1336\% \text{ a.m.}$$

► Exemplo 3.37

Um empréstimo de \$23.000 será devolvido por meio de um único pagamento de \$28.000 ao final de três meses. O banco exige que 10% do valor do empréstimo seja mantido como saldo médio aplicado em CDBs que pagam juros efetivos de 2% a.m. Calcular a taxa nominal, a taxa efetiva no prazo da operação e a taxa efetiva mensal.

$$\begin{aligned} \text{Taxa nominal no prazo} &= \frac{\text{juros nominais pagos}}{\text{empréstimo nominal}} \\ &= \frac{\$28.000 - \$23.000}{\$23.000} = 21,74\% \text{ em 3 meses} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Taxa efetiva no prazo} &= \frac{\text{custo líquido do empréstimo}}{\text{empréstimo efetivo}} \\ &= \frac{\text{juros nominais pagos} - \text{juros obtidos na aplicação exigida}}{\text{empréstimo} - \text{saldo médio exigido}} \\ &= \frac{(\$28.000 - \$23.000) - 0,10 \times \$23.000 \times [(1,02)^3 - 1]}{\$23.000 - 0,10 \times \$23.000} \\ &= 23,48\% \text{ em 3 meses} \end{aligned}$$

$$\text{Taxa efetiva mensal: } i_m = (1,2348)^{1/3} - 1 = 7,2817\% \text{ a.m.}$$

3.5 Taxa *over* (taxa por dia útil)

A palavra *overnight* refere-se a operações realizadas no mercado aberto (*open market*) pelo prazo mínimo de um dia. No sentido amplo, *open market* é qualquer mercado sem local físico determinado e com livre acesso à negociação. No Brasil, porém, essa denominação se aplica ao conjunto de transações realizadas com títulos de renda fixa, de emissão pública ou privada.

A denominada taxa *over* é geralmente adotada em operações financeiras no mercado aberto. Trata-se de uma taxa nominal, pois costuma ser expressa ao mês ou ao ano com capitalização diária, porém válida somente para dias úteis, ou seja, sua capitalização ocorre unicamente em dia de funcionamento do mercado financeiro. Caso queira realizar uma operação de mais de um dia, deve utilizar o conceito de taxa nominal para converter a taxa *over* para um dia e, em seguida, deve empregar o conceito de taxa efetiva para capitalizar (converter) a taxa de um dia para o prazo da operação. Assim, o montante de um capital aplicado à taxa *over* mensal por determinado número de dias úteis é:

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du} \quad du = \text{dias úteis no prazo da operação}$$

3.5.1 Taxa de juros efetiva equivalente à taxa *over*

O montante de um capital aplicado à taxa *over* durante certo número de dias úteis (du) é:

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du}$$

O montante do mesmo capital aplicado durante dias corridos (dc) a uma taxa efetiva mensal (i_m) é:

$$S = P(1 + i_m)^{dc/30}$$

A seguir podemos igualar os dois montantes para destacar a taxa efetiva mensal equivalente à taxa *over*:

$$\left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du} = (1 + i_m)^{dc/30} \Rightarrow i_m = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du \times 30/dc} - 1$$

onde: i_m = taxa efetiva mensal;
 dc = dias corridos;
 du = dias úteis.

O número de dias corridos (dc) é obtido pela simples diferença entre as duas datas. O número de dias úteis (du) é obtido a partir da diferença entre as duas datas, descontando-se sábados e domingos, e o número de feriados regulares e de feriados especiais entre essas datas.

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.38

Uma operação com duração de 30 dias corridos foi fechada a uma taxa *over* de 2% a.m., sendo computados 22 dias úteis nesse prazo. Determinar a taxa efetiva mensal.

Dados: taxa *over* = 2% a.m., dc = 30 dias, du = 22, i_m = ?

$$i_m = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du \times 30/dc} - 1 = \left(1 + \frac{0,02}{30}\right)^{22 \times 30/30} - 1 = 1,4770\% \text{ a.m.}$$

Em outras palavras, pode-se concluir que 1,4770% representa a taxa efetiva para 22 dias úteis, ou mesmo para 30 dias corridos do mês.

Exemplo 3.39

Uma operação com duração de 35 dias corridos foi contratada a uma taxa *over* de 1,8% a.m. Se durante esse prazo houve 25 dias úteis, calcular a taxa efetiva mensal e o montante ao término do prazo, considerando-se que foram aplicados \$100.000.

Dados: taxa *over* = 1,8% a.m., dc = 35 dias, du = 25, P = \$100.000, S = ?, i_m = ?

• Montante:

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du} = \$100.000 \times \left(1 + \frac{0,018}{30}\right)^{25} = \$101.510,85$$

- Taxa efetiva mensal:

$$i_m = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du \times 30/dc} - 1 = \left(1 + \frac{0,018}{30}\right)^{25 \times 30/35} - 1 = 1,2936\% \text{ a.m.}$$

▶ Exemplo 3.40

De uma aplicação de \$120.000, pelo prazo de 38 dias corridos, correspondentes a 32 dias úteis, foram resgatados \$126.500. Pedese determinar a taxa *over* mensal obtida.

Dados: P = \$120.000, S = \$126.500, dc = 38 dias, du = 32, taxa *over* = ?

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du}$$

$$\$126.500 = \$120.000 \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{32}$$

$$\Rightarrow \text{taxa over} = [(\$126.500/\$120.000)^{1/32} - 1] \times 30 = 4,9495\% \text{ a.m.}$$

▶ Exemplo 3.41

A cada \$1.000 aplicados foram recebidos \$1.016,12. Considerando que a operação foi contratada a uma taxa *over* de 2% a.m., calcular o número de dias úteis no prazo da aplicação.

Dados: P = \$1.000, S = \$1.016,12, taxa *over* = 2% a.m., du = ?

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du}$$

$$\$1.016,12 = \$1.000 \times \left(1 + \frac{0,02}{30}\right)^{du} \Rightarrow du = \frac{\ln(1.016,12/1.000)}{\ln(1 + 0,02/30)} = 24 \text{ dias}$$

▶ Exemplo 3.42

Uma operação com duração de 45 dias corridos, correspondentes a 39 dias úteis, apresentou uma taxa *over* de 2% a.m. Calcular a taxa de juros efetiva mensal.

Dados: dc = 45, du = 39, taxa *over* = 2% a.m., i_m = ?

$$i_m = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du \times 30/dc} - 1 = \left(1 + \frac{0,02}{30}\right)^{39 \times 30/45} - 1 = 1,7479\% \text{ a.m.}$$

▶ Exemplo 3.43

Uma aplicação em 63 dias corridos, correspondentes a 52 dias úteis, teve um rendimento efetivo de 1,5% ao mês. Calcular a taxa *over* mensal equivalente.

Dados: dc = 63, du = 52, i_m = 1,5% a.m., taxa *over* = ?

$$(1 + i_m) = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{\text{du} \times 30 / \text{dc}} \Rightarrow \text{taxa over} = [(1 + i_m)^{\text{dc}/(\text{du} \times 30)} - 1] \times 30$$

$$= [(1,015)^{63/(52 \times 30)} - 1] \times 30 = 1,8044\% \text{ a.m.}$$

▶ Exemplo 3.44

Um CDB está pagando a taxa bruta de 19% ao ano. A alíquota de IR é de 20%, incidente sobre os rendimentos totais por ocasião do resgate da operação. Determinar a taxa *over* equivalente à taxa de remuneração líquida, considerando que há 21 dias úteis no período.

Dados: Impostos = 20%, dc = 30, du = 21, taxa *over* = ?

- Taxa bruta anual = 19% a.a.
- Taxa líquida anual = 19% × (1 - 0,20) = 15,20% a.a.
- Taxa líquida efetiva mensal (i_m) = $(1,1520)^{1/12} - 1 = 1,1861\% \text{ a.m.}$
- Taxa *over* = $[(1 + i_m)^{\text{dc}/(\text{du} \times 30)} - 1] \times 30 = [(1,01861)^{30/(21 \times 30)} - 1] \times 30 = 1,6850\% \text{ a.m.}$

▶ Exemplo 3.45

Qual a taxa *over* mensal obtida de uma taxa efetiva de 1,2% a.m., considerando que no período de referência da taxa (mês) estão previstos 27 dias úteis?

Dados: dc = 30, du = 27, $i_m = 1,2\% \text{ a.m.}$, taxa *over* = ?

$$\text{taxa over} = \left[(1 + i_m)^{\text{dc}/(\text{du} \times 30)} - 1 \right] \times 30 = \left[(1,012)^{1/27} - 1 \right] \times 30 = 1,3257\% \text{ a.m.}$$

▶ Exemplo 3.46

A taxa *over* mensal em determinado momento é de 1,4% a.m. Considerando que no período de referência da taxa (mês) estão previstos 22 dias úteis, determinar a taxa efetiva mensal.

Dados: dc = 30, du = 22, taxa *over* = 1,4% a.m., $i_m = ?$

$$i_m = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{\text{du} \times 30 / \text{dc}} - 1 = \left(1 + \frac{0,014}{30}\right)^{22} - 1 = 1,0317\% \text{ a.m.}$$

Pode-se concluir que 1,0317% representa a taxa efetiva para 22 dias úteis, ou mesmo para os 30 dias corridos do mês.

3.5.2 Taxa *over* anual

As taxas de juros *over* descritas na seção anterior foram referenciadas no padrão mês. No entanto, a partir de 1998 as normas do Bacen passaram a privilegiar o tratamento dessas taxas em base ano.

O Bacen convencionou que, para efeito de cálculo da taxa *over* anual, todo período de ano possui 252 dias úteis. A taxa *over* anual é usada nos financiamentos de títulos, nas operações de *hot money*, nas negociações com a BM&F e em muitos outros casos.

↑ Exemplos de aplicação →

▶ Exemplo 3.47

Sendo 24% a.a. a taxa efetiva anual ganha por uma aplicação financeira feita por 30 dias corridos em que houve 22 dias úteis, determinar: a) a taxa efetiva mensal; b) a taxa por dia útil; c) a taxa *over* mensal; d) a taxa *over* anual.

$$\text{a) } i_m = (1,24)^{1/12} - 1 = 1,808758\% \text{ a.m.}$$

$$\text{b) } i_{du} = (1,01808758)^{1/22} - 1 = 0,0815148\% \text{ a.d.u.}$$

$$\text{c) taxa } over \text{ mensal} = 0,0815148\% \text{ a.d.u.} \times 30 \text{ dias} = 2,4454\% \text{ a.m.}$$

$$\text{d) taxa } over \text{ anual} = (1,000815148)^{252} - 1 = 22,79\% \text{ a.a.}$$

▶ Exemplo 3.48

Qual é a taxa *over* anual obtida de uma taxa mensal efetiva de 1,2% a.m. considerando que no período de referência da taxa (mês) estão previstos 21 dias úteis?

- fator por dia útil: $(1 + i_{du}) = (1,012)^{1/21} = 1,000568189$
- taxa *over* anual = $(1,000568189)^{252} - 1 = 15,3895\% \text{ a.a.}$

▶ Exemplo 3.49

Um título de \$100.000 vai ser financiado por 35 dias corridos, com taxas efetivas anuais de 18% nos primeiros 20 dias, 17% nos dez seguintes e 16% nos cinco últimos. Determinar o valor de recompra do título no final do prazo, a taxa média anual *over* e a taxa média mensal *over*.

- Valor de recompra

$$VR = \$100.000 \times (1,18)^{20/252} \times (1,17)^{10/252} \times (1,16)^{5/252}$$

$$VR = \$100.000 \times 1,013222724 \times 1,006249756 \times 1,002949183$$

$$VR = \$100.000 \times 1,022561974 = \$102.256,20$$

- Taxa média anual *over* = $\left[(1,022561974)^{1/35} \right]^{252} - 1 = 17,4263\% \text{ a.a.}$
- Taxa média mensal *over* = $\left[(1,022561974)^{1/35} - 1 \right] \times 30 = 1,9130\% \text{ a.m.}$

3.5.3 Certificado de depósito interbancário

Os Certificados de Depósito Interbancário (CDI), são os títulos de emissão das instituições financeiras que lastreiam as operações do mercado interbancário. Suas características são similares às de um Certificado de Depósito Bancário (CDB), mas sua negociação é restrita ao mercado interbancário. Sua função é transferir recursos de uma instituição financeira para outra, de modo a manter a fluidez do sistema, ou seja, quem tem dinheiro em excesso empresta para quem estiver precisando. As operações se realizam fora do âmbito do Banco Central, tanto que, nesse mercado, não há incidência de qualquer tipo de imposto, as transações são fechadas por meio eletrônico e registradas nos computadores das instituições envolvidas e nos terminais da Câmara de Custódia e Liquidação (CETIP).

Os CDIs negociados por um dia são denominados Depósitos Interfinanceiros (DI), e detêm a característica de funcionarem como um padrão de taxa média diária, a *CDI over*. A taxa média diária do CDI é utilizada como parâmetro para avaliar a rentabilidade de fundos, como os DI e renda fixa. Quando o gestor informa ao investidor que um fundo rende 95% do CDI, isso significa que, ao calcular essa porcentagem, o investidor poderá saber quanto rendeu ou rende o fundo. O CDI é usado também como parâmetro para operações de *Swap* (contrato de troca de qualquer tipo de ativo, seja ele de moedas, *commodities*, taxas de juros etc.) na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (BM&FBOVESPA) para o ajuste diário do DI futuro. As taxas do CDI *over* estabelecem os parâmetros das taxas referentes às operações de empréstimos de curtíssimo prazo, conhecidas como *hot Money*, que embute o custo do CDI *over* acrescido do PIS e de um *spread* bancário.

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.50

Um CDI pré-fixado de 30 dias de prazo foi comercializado à taxa anual efetiva de 9,5 % a.a. Supondo o mês com 21 dias úteis, determinar: a) a taxa efetiva mensal; b) a taxa por dia útil; c) a taxa *over* mensal; d) a taxa *over* anual.

$$\text{a) } i_m = \left[\left(1 + \frac{9,5}{100} \right)^{1/12} - 1 \right] \times 100 = 0,75915340\% \text{ a.d.u.}$$

$$\text{b) } i_{du} = \left[\left(1 + \frac{0,75915340}{100} \right)^{1/21} - 1 \right] \times 100 = 0,0360201\% \text{ a.d.u.}$$

$$\text{c) } \text{taxa over mensal} = 0,0360201\% \text{ a.d.u.} \times 30 \text{ dias} = 1,080603\% \text{ a.m.}$$

$$\text{d) } \text{taxa over anual} = \left[\left(1 + \frac{0,0360201}{100} \right)^{252} - 1 \right] \times 100 = 9,50\% \text{ a.m.}$$

► Exemplo 3.51

Uma operação interbancária é realizada por três dias. As *taxas over* em cada dia são: 1,9%, 1,87%, 1,84%. Calcular a taxa efetiva no período e a *taxa over* média da operação.

$$\text{taxa over}_1 = 1,9/30 = 0,06333\% \text{ a.d.}$$

$$\text{taxa over}_2 = 1,87/30 = 0,06233\% \text{ a.d.}$$

$$\text{taxa over}_3 = 1,84/30 = 0,06123\% \text{ a.d.}$$

- Taxa efetiva no período: $(1,0006333) \times (1,0006233) \times (1,0006123) - 1 = 0,1871\%$
- Taxa média diária: $(1,001871)^{1/3} - 1 = 0,06233\% \text{ ao dia}$

► Exemplo 3.52

Um capital de \$10.000 foi aplicado em 31/03/2010 para ser resgatado em 06/04/2010. Se a aplicação obtiver 100% da taxa DI Pré-over, determinar o valor de resgate.

Diariamente, a Central de Custódia e Liquidação de Títulos Privados (CETIP) divulga a taxa DI Over, que é uma média calculada com base nas operações do mercado interbancário prefixadas e pactuadas por um dia útil. O quadro a seguir mostra a tabela com as taxas DI Pré-over para os dias úteis durante o prazo da operação:

Taxas DI Pré-over

Data (dia útil)	Média	Fator diário
31/03/2010	8,61%	1,00032780 (*)
01/04/2010	8,58%	1,00032671
05/04/2010	8,61%	1,00032780
06/04/2010	8,62%	1,00032817

(*) $(1+8,61\%/100)^{1/252}$

Fonte: <http://www.cetip.com.br>

- Valor de resgate em 06/04/2010:

$$\$10.000 \times (1,00032780 \times 1,00032671 \times 1,00032780 \times 1,00032817) = \$10.013,11$$

Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios, considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias.

1. Dada a taxa efetiva de 48% a.a., determinar a taxa equivalente ao mês, ao trimestre e ao semestre.
2. Calcular as taxas de juros efetivas mensal, trimestral e semestral, equivalentes à taxa nominal de 60% a.a., capitalizada mensalmente.

3. Determinar a taxa efetiva anual equivalente a uma taxa nominal de 60% a.a., nas seguintes hipóteses de capitalização dos juros da taxa nominal: diária, mensal, trimestral e semestral.
4. Calcular a taxa nominal anual equivalente à taxa efetiva de 40% a.a. nas seguintes hipóteses de capitalização dos juros da taxa nominal: mensal, trimestral e semestral.
5. A que taxa nominal anual, capitalizada mensalmente, uma aplicação de \$13.000 resulta em um montante de \$23.000 em sete meses?
6. Se uma aplicação de \$18.000 à taxa nominal de 180% a.a., capitalizada mensalmente, resultou em um montante de \$36.204,48, por quantos meses o capital ficou aplicado?
7. Determinar:
 - a) a taxa efetiva para dois meses equivalente à taxa nominal de 120% a.a., capitalizada mensalmente;
 - b) a taxa efetiva para 18 meses equivalente à taxa nominal de 120% a.a., capitalizada semestralmente;
 - c) a taxa nominal anual, capitalizada mensalmente, equivalente à taxa efetiva de 10% em 60 dias;
 - d) a taxa nominal anual, capitalizada trimestralmente, equivalente à taxa efetiva de 15% a.s.;
 - e) a taxa efetiva para 41 dias equivalente à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada diariamente;
 - f) a taxa efetiva para 41 dias equivalente à taxa nominal de 24% a.s., capitalizada diariamente.
8. Um capital foi aplicado à taxa nominal de 90% a.a., capitalizada mensalmente. Calcular a taxa efetiva equivalente para os seguintes prazos: 180 dias, três meses, cinco trimestres e sete semestres.
9. Uma aplicação de \$18.000 rendeu juros efetivos de \$4.200 em quatro meses. Qual seria o rendimento em 11 meses?
10. Quanto devemos aplicar em um CDB que paga uma taxa nominal de 84% a.a., capitalizada mensalmente, para obter um montante de \$76.000 após quatro meses?
11. Calcular o montante para um capital de \$2.000 aplicado conforme as hipóteses a seguir:

	Prazo	Taxa nominal	Capitalização
a)	3 meses	48% a.s.	mensal
b)	2 anos	18% a.a.	mensal
c)	17 dias	35% a.m.	diária

12. A juros nominais de 48% a.a., capitalizados mensalmente, determinar em quantos meses um capital de \$10.000 rende juros de \$3.685,69.
13. Para os seguintes prazos, calcular as taxas efetivas equivalentes à taxa efetiva de 48% a.a.:
 - a) 8 meses; b) 11 meses; c) 18 dias; d) 3 meses; e) 420 dias; f) 7 meses e 12 dias.
14. Qual é a melhor alternativa: investir à taxa nominal de 240% a.a., capitalizada mensalmente, ou à de 264% a.a., capitalizada bimestralmente?
15. Qual deve ser a frequência da capitalização dos juros de uma taxa nominal de 565,98% a.a., de modo que seu rendimento seja equivalente à taxa nominal de 480% a.a., capitalizada bimestralmente?
16. Em quanto tempo dobra um capital aplicado à taxa nominal de 227,05% a.a., capitalizada mensalmente?
17. Em 14 meses, uma aplicação de \$12.000 rendeu juros brutos de \$2.300. Considerando a cobrança de 2% de impostos sobre os rendimentos, calcular a taxa efetiva mensal obtida pela aplicação.
18. Calcular o rendimento de \$17.800 aplicados por sete meses à taxa efetiva de 45% a.a.
19. Um capital de \$24.000 aplicado à taxa nominal de 120% a.a., capitalizada mensalmente, rendeu \$5.040. Determinar o prazo da operação.
20. Em sete meses, um investimento de \$15.000 teve um rendimento bruto de \$4.000. Considerando-se um imposto de 3% sobre o rendimento e uma comissão de 1,5% sobre o valor aplicado, calcular a taxa de juros efetiva mensal obtida na aplicação.
21. Um investimento rende juros nominais de 6% a.a., capitalizados mensalmente. Calcular a taxa efetiva anual.

22. Em operações de crédito, o Banco A cobra uma taxa efetiva de 30% a.a., e o Banco B cobra juros nominais de 27% a.a., capitalizados mensalmente. Qual é a melhor taxa para o cliente?
23. Uma aplicação a juros nominais de 24% a.a., capitalizados semestralmente, resultou em um montante de \$10.000. Se a taxa fosse de 48% a.a., capitalizada trimestralmente, o montante seria de \$15.735,19. Calcular o capital e o prazo da aplicação em anos.
24. Em que prazo um capital de \$75.000, aplicado à taxa nominal de 22% a.a., capitalizada semestralmente, resulta em um montante de \$155.712?
25. Dois capitais foram aplicados: o primeiro, de \$8.000, à taxa nominal de 20% a.a., capitalizada trimestralmente; e o segundo, de \$33.800,80, à taxa nominal de 10% a.a., capitalizada semestralmente. Em quantos anos os dois capitais produzirão o mesmo rendimento?
26. Um capital de \$12.600 foi aplicado por três anos à taxa nominal de 22% a.a. Calcular o montante, considerando-se que no primeiro ano os juros são capitalizados semestralmente; no segundo, trimestralmente; e no terceiro, bimestralmente.
27. Um capital de \$12.500 aplicado à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada semestralmente, rendeu juros de \$12.172,78. Calcular o prazo da aplicação.
28. Três quartos de um capital foram aplicados à taxa nominal de 20% a.a., capitalizada semestralmente, e o restante, à de 12% a.s., capitalizada trimestralmente. Considerando-se o prazo de aplicação de quatro anos e sabendo-se que o rendimento (juros obtidos) da primeira parcela foi \$4.726,04 maior que o rendimento da segunda, calcular o capital.
29. Um capital aplicado à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada semestralmente, rendeu \$9.738,23. Se a taxa fosse de 48% a.a., capitalizada trimestralmente, o rendimento seria de \$28.959,76. Determinar o prazo da aplicação em anos e calcular o valor do capital.
30. Um capital aplicado durante quatro anos à taxa nominal de 12% a.a., capitalizada mensalmente, rendeu de juros \$12.252 a mais do que teria rendido se a capitalização fosse semestral. Calcular o valor do capital.
31. Dividir a importância de \$2.832.774 em três partes de tal modo que cada parte, aplicada à taxa nominal de 20% a.a., capitalizada semestralmente, produza, respectivamente, montantes iguais em dois, três e cinco anos. Sabe-se que a diferença entre o primeiro e o segundo capital é de \$205.627,30.
32. Dois capitais foram aplicados pelo prazo de dois anos. O primeiro, à taxa nominal de 20% a.a., capitalizada semestralmente, e o segundo, à de 18% a.a., capitalizada trimestralmente. Considerando-se que os juros obtidos pelo primeiro capital excederam em \$6.741,00 os juros obtidos pelo segundo e que o primeiro é \$10.000 maior que o segundo, calcular os dois capitais.
33. Um capital foi aplicado durante cinco anos à taxa nominal de 5,5% a.a., capitalizada semestralmente, e a seguir seu montante foi aplicado a juros efetivos de 4% a.a. durante dez anos. A que taxa efetiva anual única o capital poderia ser aplicado durante todo esse tempo para resultar no mesmo montante?
34. Uma pessoa precisa de um empréstimo de \$10.000 por um período de dois anos. Oferecem-lhe o dinheiro nas seguintes condições: a) a juros nominais de 5% a.a., capitalizados trimestralmente; b) à taxa nominal de 5,375% a.a., capitalizada semestralmente; c) a juros simples de 5,5% a.a. Qual é a melhor oferta?
35. Uma pessoa aplicou um capital de \$20.000 durante quatro anos à taxa nominal de 18% a.a., capitalizada semestralmente. Ao término desse período, somente os juros obtidos foram reaplicados por mais 15 meses à taxa nominal de 12% a.a., capitalizada trimestralmente. Calcular o rendimento dessa última aplicação.
36. Um banco oferece uma rentabilidade efetiva de 40% a.a. Considerando-se que o investidor tem condições de obter juros efetivos de 9% a.t. em outro banco, qual deve ser a alternativa escolhida?
37. Um investidor aplicou \$25.000 na Bolsa de Valores esperando obter uma rentabilidade efetiva de 100% a.a. Caso tal rentabilidade ocorresse, calcular os juros obtidos ao fim de 20 meses.

38. Um capital aplicado à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada semestralmente, rendeu \$2.294,08. Se a taxa fosse de 48% a.a., capitalizada trimestralmente, o montante seria de \$9.903,85. Calcular o capital e o prazo da aplicação.
39. O produto interno bruto (PIB) de um país cresceu 200% em dez anos. Qual foi a taxa de crescimento anual média?
40. Em 12 de outubro de 2006, um capital de \$2.300 foi aplicado à taxa nominal de 36% a.a., capitalizada diariamente. Calcular os juros acumulados até 24 de novembro de 2007. (Considerar o ano civil.)
41. Em 31 de dezembro de 2005, uma pessoa aplicou \$10.000 à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada diariamente. Considerando-se que, a partir de 1^a de janeiro de 2007, a taxa nominal passou a ser de 20% a.a., calcular o valor de resgate da aplicação no dia 30 de junho de 2007. (Considerar o ano civil.)
42. Uma aplicação foi feita em duas parcelas: a primeira, por quatro anos à taxa nominal de 28% a.a., com capitalização trimestral; e a segunda, por dois anos à taxa nominal de 12% a.s., com capitalização mensal. Considerando-se que a primeira parcela excede em \$100 a segunda e que a diferença dos juros obtidos entre as duas é de \$1.404,57, calcular o valor do capital.
43. Um capital de \$4.000 foi aplicado por 11 meses: nos primeiros três meses, à taxa de 24% a.a., capitalizada mensalmente, e, nos oito últimos meses, à taxa de 36% a.s., capitalizada trimestralmente. Calcular o rendimento da aplicação.
44. Um capital de \$6.000 foi aplicado por 25 meses: nos primeiros 11 meses, à taxa de 48% a.a., capitalizada mensalmente, nos 12 meses seguintes, à taxa de 40% a.s., capitalizada trimestralmente, e, nos últimos dois meses, à taxa de 36% a.a., capitalizada bimestralmente. Calcular o montante final.
45. Dois terços de um capital foram aplicados por dois anos à taxa de 18% a.s., capitalizada bimestralmente, e o restante foi aplicado por determinado prazo à taxa de 18% a.t., capitalizada mensalmente. Considerando-se que o valor do capital é de \$12.000 e o rendimento da primeira parcela é \$4.048,79 maior que o rendimento da segunda, calcular o prazo em anos da segunda parcela.
46. Um capital foi aplicado por 18 meses a juros nominais de 24% a.a., capitalizados mensalmente. Se as capitalizações da taxa nominal fossem semestrais, o rendimento seria \$1.000 menor. Calcular o valor do capital.
47. Calcular o prazo em que um capital dobra quando aplicado a juros nominais de 120,17% a.a., capitalizados diariamente.
48. A que prazo devemos aplicar um capital a juros nominais de 20% a.a., capitalizados trimestralmente, de modo que ele proporcione o mesmo rendimento obtido se for aplicado durante oito anos a juros efetivos de 5% a.a.?
49. Um investidor teria o mesmo rendimento se aplicasse um capital em qualquer uma de duas opções de investimento. A primeira opção permite aplicar o capital durante quatro anos à taxa efetiva composta de 8% a.a., e a segunda, durante dois anos a determinada taxa nominal anual, capitalizada semestralmente. Qual é a taxa nominal?
50. Em que data um capital de \$10.000 aplicado em 20 de setembro de 2006 a juros efetivos de 40% a.a. resultará em um montante de \$19.600? (Considerar o ano civil.)
51. Qual é o prazo (em meses) de aplicação de um capital de \$20.000 para que ele proporcione um rendimento mínimo de \$5.000 quando aplicado à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada mensalmente?
52. Um capital foi aplicado em uma conta remunerada que paga uma taxa de 24% a.a., capitalizada trimestralmente. Após um ano a taxa baixou para 20% a.a., o que motivou o saque de uma quantia igual a 50% do capital aplicado inicialmente. Se, transcorridos seis meses desse saque, a conta foi encerrada, resgatando-se o saldo total de \$20.000, calcular o capital aplicado inicialmente.
53. Calcular o valor dos juros pagos por um financiamento de capital de giro de \$1.500, por cinco dias, contratado à taxa de 3% a.m., capitalizada diariamente.
54. Calcular a taxa nominal anual capitalizada trimestralmente, equivalente à taxa efetiva de 12% a.a.

CAPÍTULO

Operações de curto prazo

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

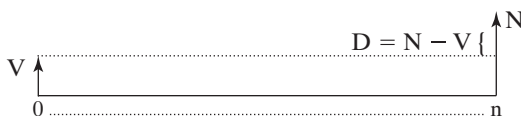
Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Desconto simples
- Títulos públicos
- *Factoring*
- *Hot money*
- *Commercial papers*
- *Export note*
- Conta garantida

4.1 Desconto

Desconto é a denominação dada a um abatimento que se faz quando um título de crédito é resgatado antes de seu vencimento. É uma operação tradicional no mercado financeiro e no setor comercial, em que o portador de títulos de crédito, tais como letras de câmbio, notas promissórias etc., pode levantar fundos em um banco, descontando o título antes da data de vencimento. O banco, naturalmente, libera uma quantia menor que o valor inscrito no título, dito nominal. A diferença entre o valor nominal (N) e o valor líquido (V) pago ao portador do título é o que se denomina desconto (D). O seguinte diagrama ilustra o processo:



4.1.1 Desconto simples

Pela sistemática de capitalização simples, os valores do desconto são obtidos por meio de cálculos lineares. Nessa sistemática, o desconto é tradicionalmente classificado em duas modalidades: desconto racional simples (também chamado desconto por dentro) e desconto bancário ou comercial simples (também denominado desconto por fora). A rigor, o desconto racional simples não passa de uma aplicação de juros simples quando o valor presente do capital é desconhecido.

4.1.1.1 Desconto racional simples

Nessa modalidade, o valor do desconto é calculado a juros simples da seguinte maneira:

$$D_r = N - V_r = N - \frac{N}{1 + i \times n} \Rightarrow D_r = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n}$$

onde i representa a taxa de juros simples, n é o prazo a decorrer até o vencimento do título e V_r é o valor atual ou o valor líquido liberado na data do desconto. O uso da equação anterior exige a observação da regra de proporcionalidade entre as dimensões da taxa de juros e o prazo da operação.

Equivalência entre desconto racional simples e juros simples

Na equação a seguir, comprova-se a equivalência entre o desconto racional simples e o regime de juros simples:

$$D_r = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n} = \frac{P(1 + i \times n) \times i \times n}{1 + i \times n} = P \times i \times n$$

Dessa maneira, podemos observar que o valor do desconto racional é igual ao dos juros calculados sobre o principal no regime de juros simples. Por isso, muitos autores argumentam que não se justifica a apresentação do desconto racional simples como um critério de cálculo com características específicas. Ele não passa de uma aplicação particular de juros simples sobre o valor atual do título e não apresenta praticamente nenhuma aplicação relevante nas operações bancárias ou comerciais.

Neste livro, o desconto racional simples é apresentado em função de eventuais necessidades do leitor e por razões meramente didáticas, a fim de esclarecer suas diferenças com relação ao desconto comercial simples, que será tratado a seguir.

4.1.1.2 Desconto comercial simples

Nessa modalidade, também chamada *desconto por fora*, o valor do desconto é obtido multiplicando-se o valor nominal do título pela taxa de desconto fornecida pelo banco e pelo prazo a decorrer até o vencimento do título:

$$D = N \times d \times n$$

onde d representa a taxa de desconto comercial, também chamada *taxa por fora*, n é o prazo e N é o valor nominal (valor de resgate) do título. O uso da equação anterior exige observar a regra de proporcionalidade entre as dimensões da taxa de desconto e o prazo da operação.

Uma expressão para o valor liberado (valor descontado ou valor atual) pode ser obtida considerando-se que o valor do desconto é sempre igual à diferença entre o valor nominal e o valor liberado pelo título:

$$D = N - V \\ N \times d \times n = N - V \Rightarrow V = N \times (1 - d \times n)$$

O *desconto bancário* pode ser considerado uma extensão do desconto comercial; basta acrescentar a TSB — taxa de serviço bancário (s), que comumente incide sobre o valor

nominal. Logo, as expressões para o valor do desconto e para o valor liberado passam a ser as seguintes:

$$D = N \times (s + d \times n)$$

$$V = N \times (1 - s - d \times n)$$

Considerando-se que o valor do desconto é o juro pago sobre o valor nominal do título, podemos expressar a taxa mensal de desconto em função do valor do desconto (D) e do valor nominal (N):

$$d = \left(\frac{D}{N} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right)$$

n = prazo em dias

A modalidade de desconto comercial simples apresenta ampla aplicação nas operações bancárias ou comerciais de curto prazo. Fornecida a taxa de desconto, uma empresa pode calcular o valor do desconto multiplicando aquela taxa pelo valor nominal e pelo prazo da operação.

4.1.2 Taxa de desconto efetiva

A taxa de desconto efetiva é aquela que é realmente cobrada na operação de desconto. Essa taxa, quando aplicada sobre o valor liberado (valor descontado), gera no período considerado (prazo da operação) um montante igual ao valor nominal do título (isto é, gera juros iguais ao valor do desconto).

4.1.2.1 Taxa de desconto efetiva linear (i)

Na sistemática de capitalização simples, a taxa de desconto efetiva linear pode ser determinada da seguinte maneira:

$$V \times (1 + i \times n) = N$$

$$N(1 - d \times n) \times (1 + i \times n) = N \Rightarrow i = \frac{d}{1 - d \times n}$$

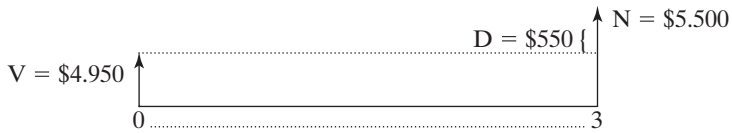
Essa expressão mostra que a taxa de desconto efetiva linear é a própria taxa de juros simples. A partir de determinada taxa de desconto d, podemos calcular a taxa efetiva i e vice-versa.

Para maior entendimento do que vem a ser a taxa de desconto efetiva, consideremos uma duplicata com valor nominal de \$5.500, descontada comercialmente três meses antes do vencimento à taxa de desconto de 3,3333% a.m. A seguir, calculamos o valor do desconto (juros) e o valor liberado:

$$D = N \times d \times n = \$5.500 \times 0,033333 \times 3 = \$550$$

$$V = N - D = \$5.500 - \$550 = \$4.950$$

Graficamente:



$$\text{Taxa efetiva linear (i)} = \frac{d}{1 - d \times n} = \frac{0,0333333}{1 - 0,0333333 \times 3} = 3,7037\% \text{ a.m.}$$

Se aplicarmos o valor liberado (\$4.950) à taxa de 3,3333% a.m. durante três meses, teremos o seguinte montante:

$$\$4.950 \times (1 + 0,033333 \times 3) = \$5.445$$

Repare que o montante obtido (\$5.445) é menor que o valor nominal do título (\$5.500). Logo, no desconto comercial, a taxa de desconto (d) fornecida pelo banco não é capaz de produzir o valor nominal a partir do valor liberado, sendo necessário, portanto, distinguir entre taxa de desconto fornecida pelo banco (taxa contratada) e taxa de desconto efetiva da operação.

Agora, se aplicarmos o valor liberado (\$4.950) à taxa efetiva de 3,7037% a.m. durante três meses, obteremos o valor nominal do título:

$$\$4.950 \times (1 + 0,037037 \times 3) = \$5.500$$

No desconto comercial, a taxa efetiva (i) é maior que a taxa de desconto fornecida (d). Isso ocorre porque, no desconto comercial, os juros são pagos antecipadamente e, em consequência, podem ser reaplicados pelo banco, conduzindo a uma rentabilidade maior que os 3,3333% a.m. Isso explica, em parte, o maior uso do desconto comercial, uma vez que ele representa maior lucro ao banco, que é, em última análise, a instituição que detém o maior poder de barganha.

Alternativamente, considerando que a taxa efetiva é o juro simples pago sobre o valor liberado, podemos expressar a taxa efetiva linear em função do valor do desconto e do valor liberado:

Em base mensal:	Em base anual:
$i = \left(\frac{D}{V}\right) \times \left(\frac{30}{n}\right)$	$i = \left(\frac{D}{V}\right) \times \left(\frac{360}{n}\right)$
n = prazo em dias	

Em nosso exemplo:

$$i = \left(\frac{D}{V}\right) \times \left(\frac{30}{n}\right) = \left(\frac{\$550}{\$4.950}\right) \times \left(\frac{30}{90}\right) = 3,7037\% \text{ a.m.}$$

No desconto bancário, é comum os bancos brasileiros cobrarem uma tarifa de serviço (s) incidente sobre o valor nominal do título, além do encargo proveniente do imposto sobre operações financeiras (IOF), de responsabilidade do financiado. Podemos incorporar essas taxas no cálculo da taxa efetiva linear:

$$V \times (1 + i \times n) = N$$

$$N (1 - d \times n - s - \text{IOF} \times n) \times (1 + i \times n) = N$$

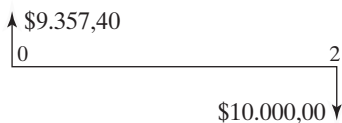
$$\Rightarrow i = \left(\frac{d \times n + s + \text{IOF} \times n}{1 - d \times n - s - \text{IOF} \times n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)$$

Atenção: Para facilitar os cálculos nos exercícios deste livro, a fórmula anterior foi derivada calculando-se o IOF sobre o valor nominal (N). No entanto, na prática, é cobrada a alíquota de 0,0041% a.d. sobre o valor líquido liberado (V). A diferença é muito pequena, porque os prazos das operações de desconto são curtos.

4.1.2.2 Taxa de desconto efetiva exponencial

O cálculo da taxa de desconto efetiva linear não incorpora o real comportamento exponencial dos juros. Essa taxa foi apresentada na seção anterior por motivos meramente didáticos e em função de eventuais necessidades do leitor. Para esclarecer o conceito de taxa efetiva exponencial, admitamos que um título com valor nominal de \$10.000 seja descontado comercialmente em um banco 60 dias (dois meses) antes de seu vencimento, a uma taxa de desconto de 2% a.m. e com IOF de 0,0041% a.d. incidente sobre a operação. O banco cobra ainda uma tarifa de serviço bancário (TSB) de 2% sobre o valor nominal do título, paga no ato da liberação dos recursos:

Valor nominal do título	\$10.000,00
Valor do desconto: \$10.000 × 0,02 × 2	-400,00
IOF: \$10.000 × 0,000041 × 60 dias	-24,60
TSB: \$10.000 × 0,02	-200,00
Valor líquido liberado:	\$9.375,40



Custo efetivo da operação:

$$i = (10.000/9.375,40) - 1 = 6,6621\% \text{ em 2 meses}$$

$$i_m = (1,066621)^{1/2} - 1 = 3,2774\% \text{ a.m.}$$

$$i_a = (1,066621)^6 - 1 = 47,2520\% \text{ a.a.}$$

Ou seja, a taxa de desconto efetiva da operação é de 3,2774% a.m., maior que os 2% a.m., que é a taxa de desconto contratada.

Podemos obter uma expressão para o cálculo direto da taxa efetiva exponencial (composta) mensal considerando que, se essa taxa for aplicada sobre o valor liberado, durante o prazo da operação, resultará em um montante igual ao valor nominal do título:

$$V \times (1 + i_e)^{n/30} = N \quad \Rightarrow \quad i_e = \left(\frac{N}{V} \right)^{30/n} - 1$$

$$\text{ou: } i_e = \left(\frac{N}{N(1 - d \times n)} \right)^{30/n} - 1 \quad \Rightarrow \quad i_e = \left(\frac{1}{\text{PU}} \right)^{30/n} - 1$$

$$\text{onde: PU} = (1 - d \times n)$$

O fator $(1 - d \times n)$ denomina-se preço unitário (PU) do título, isto é, o valor líquido comercial de uma unidade monetária ($N = \$1$). Por exemplo, uma duplicata com um PU de 0,95 significa que seu valor descontado (valor liberado) será de \$0,95 para cada \$1 de valor nominal da duplicata. A unidade, que nesse caso é igual a \$1, poderia ser \$10, \$100, \$1.000 ou qualquer outro valor.

Com os dados do exemplo:

$$i_e = (N/V)^{30/n} - 1 = (10.000/9.375,40)^{30/60} - 1 = 3,2774\% \text{ a.m.}$$

onde n é o prazo da operação em dias. A taxa de desconto efetiva exponencial tem cálculos mais rigorosos que a taxa efetiva linear, pois incorpora o real comportamento exponencial dos juros. Conseqüentemente, é a forma mais apropriada de calcular o verdadeiro custo de uma operação de desconto.

↑ Exemplos de aplicação →

▶ Exemplo 4.1

Uma duplicata com vencimento em 15 de dezembro é descontada comercialmente por \$2.000 em 1º de setembro do mesmo ano a uma taxa de juros simples de 6% a.m. Calcular o valor de resgate (valor nominal) do título e a taxa de desconto efetiva linear.

Dados: $d = 6\% \text{ a.m.}$, $V = \$2.000$, $n = ?$, $N = ?$, $i = ?$

- Prazo da operação:

Utilizamos a tábua para contagem de dias entre duas datas (ver p. 10):

$$\begin{aligned} \text{número de dias da data posterior (15 de dezembro)} &= +349 \\ \text{número de dias da data anterior (1º de setembro)} &= -244 \\ \text{prazo da operação em dias (n)} &= 105 \end{aligned}$$

- Cálculo do valor de resgate do título:

$$\begin{aligned} V &= N \times [1 - d \times n] \\ \$2.000 &= N \times [1 - 0,06 \times (105/30)] \quad \Rightarrow \quad N = \$2.531,65 \end{aligned}$$

- Taxa de desconto efetiva linear:

$$i = \frac{d}{1 - d \times n} = \frac{0,06}{1 - 0,06 \times (105/30)} = 7,5949\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou: } i = \left(\frac{D}{V} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$2.531,65 - \$2.000}{\$2.000} \right) \times \left(\frac{30}{105} \right) = 7,5949\% \text{ a.m.}$$

Verifica-se que, no desconto comercial, a taxa de desconto efetiva é maior que a taxa de desconto fornecida pelo banco ($i > d$).

▶ Exemplo 4.2

Uma empresa descontou em um banco um borderô de duplicatas à taxa de desconto de 15% a.m. Considerando uma tarifa de serviço bancário (s) de 2%, calcular o valor liberado do borderô segundo as regras do desconto bancário.

Borderô de duplicatas			
Sacado	Valor de resgate (N)	Prazo (n)	Valor liberado $V = N \times [1 - s - d \times n/30]$
A	\$5.000	10 dias	\$5.000 $[1 - 0,02 - 0,15 \times 10 / 30] = \4.650
B	\$7.000	15 dias	\$7.000 $[1 - 0,02 - 0,15 \times 15 / 30] = \6.335
C	\$4.000	12 dias	\$4.000 $[1 - 0,02 - 0,15 \times 12 / 30] = \3.680
D	\$2.000	20 dias	\$2.000 $[1 - 0,02 - 0,15 \times 20 / 30] = \1.760

Valor liberado total: \$16.425

▶ Exemplo 4.3

Um banco realiza suas operações de desconto aplicando uma taxa de desconto de 2% a.m., porém exige um saldo médio de 30% do valor da operação a título de reciprocidade bancária. Uma empresa descontou, nesse banco, uma nota promissória de \$100.000 três meses antes do vencimento. Calcular o valor liberado à empresa e a taxa de desconto efetiva linear, supondo a exigência e a não exigência de saldo médio. Para simplificar, suponha que não haja remuneração sobre o saldo médio nem tarifas de serviços bancários.

Dados: $N = \$100.000$, $d = 2\%$ a.m., $n = 90$ dias, $V = ?$, $i = ?$

a) Sem necessidade de saldo médio:

- Valor liberado: $V = N(1 - d \times n) = \$100.000 \times (1 - 0,02 \times 3) = \94.000
- Taxa de desconto efetiva linear:

$$i = \left(\frac{D}{V} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$100.000 - \$94.000}{\$94.000} \right) \times \left(\frac{30}{90} \right) = 2,1288 \text{ a.m.}$$

$$\text{ou: } i = \frac{d}{1 - d \times n} = \frac{0,02}{1 - 0,02 \times (90/30)} = 0,021288 = 2,1288\% \text{ a.m.}$$

b) Com necessidade de saldo médio:

- Valor liberado: $V = \$94.000 - \$30.000 = \$64.000$

O saldo médio exigido é de \$30.000 ($0,3 \times \100.000). Na prática, tudo se passa como se o banco, por ocasião da liberação dos recursos, fizesse uma retenção de \$30.000. Esses \$30.000 ficarão parados na instituição bancária por três meses. Na liquidação da operação (final do terceiro mês), a empresa precisará desembolsar apenas \$70.000 ($\$100.000 - \30.000), pois o banco já dispõe dos \$30.000 retidos como saldo médio.

- Taxa de desconto efetiva linear:

$$i = \left(\frac{D}{V}\right) \times \left(\frac{30}{n}\right) = \left(\frac{\$100.000 - \$94.000}{\$64.000}\right) \times \left(\frac{30}{90}\right) = 3,125\% \text{ a.m.}$$

Nota-se que a exigência de saldo médio encarece a operação, que passa de um custo efetivo de 2,1288% a.m. para 3,125% a.m.

► Exemplo 4.4

Um título de \$90.000 é descontado por \$63.000 pelas regras do desconto comercial. Sabendo-se que a taxa de desconto efetiva linear é 6,1224% a.m., determinar a taxa de desconto contratada e o prazo da operação.

Dados: $i = 6,1224\% \text{ a.m.}$, $V = \$63.000$, $N = \$90.000$, $d = ?$, $n = ?$

a) Cálculo da taxa de desconto:

$$D = N \times d \times n$$

$$\$27.000 = \$90.000 \times d \times n \Rightarrow d \times n = 0,3$$

Substituindo $d \times n = 0,3$ na expressão da taxa efetiva linear e destacando a taxa de desconto d :

$$i = \frac{d}{1 - d \times n}$$

$$0,061224 = \frac{d}{1 - 0,3} \Rightarrow d = 4,2857\% \text{ a.m.}$$

b) Cálculo do prazo da operação:

$$D = N \times d \times n$$

$$\$27.000 = \$90.000 \times 0,042857 \times n \Rightarrow n = 7 \text{ meses}$$

► Exemplo 4.5

Uma duplicata de \$6.000 foi descontada comercialmente, resultando em um crédito de \$5.100 na conta do cliente. Considerando uma taxa de desconto de 5% a.m., calcular o prazo ao vencimento do título, a taxa de desconto efetiva linear e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Dados: $N = \$6.000$, $V = \$5.100$, $d = 5\%$ a.m., $n = ?$, $i = ?$, $i_e = ?$

a) Prazo do título:

$$D = N \times d \times n$$

$$\$6.000 - \$5.100 = \$6.000 \times 0,05 \times (n/30) \Rightarrow n = 90 \text{ dias}$$

b) Taxa de desconto efetiva linear:

$$i = \frac{d}{1 - d \times n} = \frac{0,05}{1 - 0,05 \times (90/30)} = 0,0588 = 5,88\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou: } i = \left(\frac{D}{V} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$6.000 - \$5.100}{\$5.100} \right) \times \left(\frac{30}{90} \right) = 5,88\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$i_e = (N/V)^{30/n} - 1 = (\$6.000/\$5.100)^{30/90} - 1 = 5,5667\% \text{ a.m.}$$

O banco cobra antecipadamente \$900 sobre um valor liberado de \$5.100 para uma operação com prazo de 90 dias; portanto, a taxa de desconto efetivamente exponencial cobrada é de 5,5667% a.m. A taxa efetiva exponencial é o verdadeiro custo da operação, pois incorpora o real comportamento exponencial dos juros.

▶ Exemplo 4.6

Um título de crédito com valor nominal de \$200.000 foi descontado 63 dias antes de seu vencimento à taxa simples de desconto de 3% a.m. Considerando a cobrança de IOF de 1% a.m. e uma tarifa de serviço bancário (s) de 2,5%, calcular o valor do desconto comercial, o valor liberado, a taxa de desconto efetiva linear e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Dados: $N = 200.000$, $n = 63$ dias, $d = 3\%$ a.m., $\text{IOF} = 1\%$ a.m., $s = 2,5\%$, $D = ?$, $V = ?$, $i = ?$, $i_e = ?$

a) Valor do desconto (incluindo tarifa de serviço bancário e IOF):

$$D = N \times [s + d \times n + \text{IOF} \times n]$$

$$= \$200.000 \times [0,025 + 0,03 \times (63/30) + 0,01 \times (63/30)] = \$21.800$$

b) Valor liberado: $V = N - D = \$200.000 - \$21.800 = \$178.200$

c) Taxa de desconto efetiva linear:

$$i = \left(\frac{D}{V} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$21.800}{\$178.200} \right) \times \left(\frac{30}{63} \right) = 5,83\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou: } i = \left(\frac{d \times n + s + \text{IOF} \times n}{1 - d \times n - s - \text{IOF} \times n} \right) \times \left(\frac{1}{n} \right) =$$

$$= \left(\frac{0,03 \times (63/30) + 0,025 + 0,01 \times (63/30)}{1 - 0,03 \times (63/30) - 0,025 - 0,01 \times (63/30)} \right) \times \left(\frac{1}{63/60} \right) = 5,83\% \text{ a.m.}$$

d) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$i_e = (N/V)^{30/n} - 1 = (\$200.000/\$178.200)^{30/63} - 1 = 5,65\% \text{ a.m.}$$

► **Exemplo 4.7**

Uma nota promissória com valor de face de \$100.000 teve um valor líquido liberado de \$91.600, pelas regras do desconto bancário, a uma taxa de desconto de 5% a.m. Considerando que foi cobrado IOF de 1% a.m., determinar o prazo da operação e as taxas efetivas linear e exponencial.

Dados: $N = \$100.000$, $V = \$91.600$, $d = 5\% \text{ a.m.}$, $\text{IOF} = 1\% \text{ a.m.}$, $n = ?$, $i = ?$, $i_e = ?$

a) Cálculo do prazo da operação:

$$V = N \times (1 - d \times n - \text{IOF} \times n)$$

$$\$91.600 = \$100.000 \times (1 - 0,05 \times n - 0,01 \times n) \Rightarrow n = 1,4 \text{ mês} = 42 \text{ dias}$$

b) Taxa de desconto efetiva linear:

$$i = \left(\frac{D}{V} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$100.000 - \$91.600}{\$91.600} \right) \times \left(\frac{30}{42} \right) = 6,5502\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou: } i = \frac{d + \text{IOF}}{1 - (d + \text{IOF}) \times n} = \frac{0,05 + 0,01}{1 - (0,05 + 0,01) \times (42/30)} = 6,5502\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$i_e = (N/V)^{30/n} - 1 = (\$100.000/\$91.600)^{30/42} - 1 = 6,4676\% \text{ a.m.}$$

► **Exemplo 4.8**

Uma empresa descontou comercialmente, 45 dias antes de seu vencimento, uma duplicata de \$140.000. Considerando um valor líquido liberado de \$110.000, calcular a taxa mensal de desconto contratada e as taxas efetivas de desconto linear e exponencial.

Dados: $N = \$140.000$, $V = \$110.000$, $n = 45 \text{ dias}$, $d = ?$, $i = ?$, $i_e = ?$

a) Taxa mensal de desconto contratada:

$$d = \left(\frac{D}{N} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$140.000 - \$110.000}{\$140.000} \right) \times \left(\frac{30}{45} \right) = 14,29\% \text{ a.m.}$$

b) Taxa de desconto efetiva linear:

$$i = \left(\frac{D}{V} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$30.000}{\$110.000} \right) \times \left(\frac{30}{45} \right) = 18,18\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou: } i = \frac{d}{1 - d \times n} = \frac{0,1429}{1 - 0,1429 \times (45/30)} = 18,18\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$i_e = (N/V)^{30/n} - 1 = (\$140.000/\$110.000)^{30/45} - 1 = 17,44\% \text{ a.m.}$$

O banco cobra antecipadamente \$30.000 sobre um valor liberado de \$110.000 para uma operação de 45 dias; portanto, a taxa efetivamente cobrada é de 17,44% a.m.

▶ Exemplo 4.9

Um banco emprestou \$1.000 a juros compostos efetivos de 24% a.a. A que taxa mensal de desconto comercial o banco deve descontar um título com valor nominal de \$1.500 e com prazo de 60 dias ao vencimento, de modo a obter o mesmo rendimento do empréstimo?

Dados: $i = 24\%$ a.a., $n = 60$ dias, $N = \$1.500$, $d = ?$

Se o banco emprestar \$1.000 pelo prazo de 60 dias a juros efetivos de 24% a.a. o rendimento é:

$$\begin{aligned} \text{Juros ganhos} &= \text{Montante} && - \text{Aplicação} \\ &= \$1.000(1,24)^{n/360} && - \$1.000 \\ &= \$1.000(1,24)^{60/360} && - \$1.000 = \$36,50 \end{aligned}$$

Como o valor do desconto (D) deve ser igual aos juros ganhos pelo empréstimo, então a taxa mensal de desconto é:

$$\begin{aligned} D &= N \times d \times n \\ \$36,50 &= \$1.500 \times d \times 2 \Rightarrow d = 1,2167\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

▶ Exemplo 4.10

Uma duplicata tem 119 dias a decorrer até o seu vencimento e está sendo descontada comercialmente a uma taxa de desconto mensal de 2% a.m. Calcular o PU do título.

Dados: $n = 119$ dias, $d = 2\%$ a.m., $PU = ?$

$$PU = (1 - d \times n) = [1 - 0,02 \times (119/30)] = 0,92067$$

$PU = 0,92067$ significa que o valor liberado pelo banco será de \$0,92067 para cada \$1 de valor nominal ou valor de resgate da duplicata.

▶ Exemplo 4.11

Uma letra financeira com valor nominal de \$3.000.000 e prazo de vencimento de 90 dias será descontada comercialmente à taxa de desconto de 2,4% a.m. Calcular o PU da letra, o valor liberado pelo banco (valor descontado) e a taxa de desconto efetiva exponencial da operação.

Dados: $N = \$3.000.000$, $n = 90$ dias, $d = 2,4\%$ a.m., $PU = ?$, $V = ?$, $i_e = ?$

- $PU = (1 - d \times n) = (1 - 0,024 \times 3) = 0,92800$
- Valor liberado: $V = N \times (PU) = \$3.000.000 \times 0,92800 = \$2.784.000$
- Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$i_e = \left(\frac{1}{PU} \right)^{30/n} - 1 = \left(\frac{1}{0,92800} \right)^{30/90} - 1 = 2,52\% \text{ a.m.}$$

► Exemplo 4.12

Um banco deseja uma rentabilidade efetiva exponencial de 3% a.m. em suas operações de desconto comercial com prazo de 60 dias. Determinar a taxa mensal de desconto que deverá aplicar nas operações, de modo que alcance a rentabilidade desejada.

Dados: $i_e = 3\%$ a.m., $n = 60$ dias, $d = ?$

$$1 + i_e = \left(\frac{1}{1 - d \times n} \right)^{30/n}$$

$$1 + 0,02 = \left(\frac{1}{1 - d \times 2} \right)^{30/60} \Rightarrow d = \frac{\left(1 - \frac{1}{(1,02)^2} \right)}{2} = 1,9416\% \text{ a.m.}$$

A taxa mensal de desconto que proporciona a rentabilidade desejada pelo banco é de 1,9416% a.m.

► Exemplo 4.13

Em 13 de setembro uma promissória com valor nominal de \$4.200.000 foi descontada comercialmente por \$4.000.000. Considerando que o título vence em 27 de novembro do mesmo ano, calcular a taxa de desconto efetiva exponencial da operação.

Dados: $N = \$4.200.000$, $V = \$4.000.000$, $n = 75$, $i_e = ?$

- Prazo da operação:

Utilizamos a tábua para contagem de dias entre duas datas (ver p. 10):

$$\begin{aligned} \text{número de dias da data posterior (27 de novembro)} &= +331 \\ \text{número de dias da data anterior (13 de setembro)} &= \underline{-256} \\ \text{prazo da operação em dias (n)} &= \underline{75} \end{aligned}$$

- Taxa de desconto efetiva exponencial da operação

$$i_e = \left(\frac{N}{V} \right)^{30/n} - 1 = \left(\frac{\$4.200.000}{\$4.000.000} \right)^{30/75} - 1 = 1,97\% \text{ a.m.}$$

▶ **Exemplo 4.14**

Um banco pretende obter uma rentabilidade efetiva exponencial de 3% a.m. em operações de desconto comercial com prazo de 180 dias. Se o banco costuma cobrar uma tarifa de serviço bancário de 1,5% sobre o valor nominal do título, qual deve ser a taxa mensal de desconto a ser aplicada?

Dados: $i_e = 3\%$ a.m., $n = 180$, $s = 1,5\%$, $d = ?$

$$i_e = \left(\frac{1}{1 - d \times n - s} \right)^{30/n} - 1$$

$$0,03 = \left(\frac{1}{1 - d \times 6 - 0,015} \right)^{30/180} - 1 \quad \Rightarrow d = \frac{\left(1 - 0,015 - \frac{1}{(1,03)^6} \right)}{6} = 2,4586\% \text{ a.m.}$$

4.2 Títulos públicos

Os governos federal, estadual e municipal captam recursos no mercado por meio da emissão de títulos representativos da dívida pública. Essencialmente, os títulos públicos emitidos pelo Tesouro Nacional estão voltados para a execução da política fiscal, antecipando receitas ou financiando déficits fiscais. Os títulos emitidos pelo Banco Central têm por objetivo principal a implementação e a execução da política monetária do governo. Diversos títulos federais têm sido utilizados com essa finalidade, tais como: letra do Tesouro Nacional (LTN), letra financeira do Tesouro (LFT) e nota do Tesouro Nacional (NTN). Entre os títulos emitidos pelo Banco Central, temos: letra do Banco Central (LBC), bônus do Banco Central (BBC) e nota do Banco Central (NBC).

4.2.1 Letras do Tesouro Nacional (LTNs)

As letras do Tesouro Nacional (LTNs) são títulos federais emitidos para a captação de recursos destinados ao atendimento das necessidades de caixa do Tesouro Nacional. São usadas pelas instituições financeiras para lastreamento das operações realizadas no mercado aberto (*open market*), e para composição da carteira dos fundos de investimento em renda fixa, fundos de renda variável, fundos multimercado etc.

As LTNs têm rendimento prefixado implícito no deságio do título. O preço unitário (PU) tem um valor nominal (de resgate) de \$ 1.000 no vencimento. A rentabilidade e o preço unitário dos títulos são calculados na base anual por meio dos juros compostos considerando 252 dias úteis.

4.2.2 Letras financeiras do Tesouro (LFTs)

As letras financeiras do Tesouro (LFTs) são títulos federais iguais ao BBC (bônus do Banco Central) emitidos também para a captação de recursos destinados ao Tesouro Nacional.

As LFTs têm rendimento pós-fixado dado pela média ponderada do volume dos financiamentos diários nas operações do Selic. O PU (preço unitário) tem um valor nominal de \$ 1.000 na emissão, o que o caracteriza como papel de ágio. O preço unitário geralmente é

expresso na forma de cotação (% do valor nominal). As taxas são calculadas na base anual por meio dos juros compostos considerando 252 dias úteis.

Exemplos de aplicação

Exemplo 4.15

Determinar o PU de uma LTN com prazo de 68 dias úteis, sabendo que a taxa *over* anual projetada para esse período é de 14% a.a.

$$PU = \frac{1.000,00}{(1+0,14)^{68/252}} = 965,26$$

Exemplo 4.16

Uma instituição financeira comprou por \$ 932.000 um lote de LTNs com prazo de vencimento de 98 dias úteis. Determinar a taxa *over* anual da operação.

- Taxa efetiva no período: $\left(\frac{1.000}{932.000/1.000}\right) - 1 = 7,2961\%$ no período
- Taxa *over* anual: $(1+0,072961)^{252/98} - 1 = 19,85\%$ a.a.

Exemplo 4.17

Um investidor pretende obter de rentabilidade uma taxa *over* anual de 15% a.a. na compra de um lote de LFTs com prazo de 95 dias úteis. Sabendo-se que a taxa Selic projetada para esse período é de 14% a.a. *over*, determinar qual deverá ser a cotação do título para que o investidor possa obter a rentabilidade requerida.

- Preço unitário das letras: $PU = \frac{1.000,00 \times (1,14)^{95/252}}{(1,15)^{95/252}} = 996,71$
- Cotação: $\frac{PU}{1.000,00} = \frac{996,71}{1.000,00} = 99,67\%$

4.3 Factoring

O *factoring* é voltado à prestação de serviços de pequenas e médias empresas, como a gestão de caixa e estoques, o controle de contas a pagar e a receber, negociações com fornecedores etc. As empresas de *factoring* adquirem, de forma definitiva, os direitos creditórios resultantes das atividades mercantis a prazo, assumindo todo o risco inerente ao crédito concedido pela empresa vendedora. Na prática, as operações de *factoring* são efetuadas no âmbito das pequenas e médias empresas para capital de giro, assemelhando-se ao desconto de duplicatas.

Segundo a legislação brasileira, o *factoring* não é caracterizado como operação financeira e portanto não está sujeito à incidência de IOF e demais encargos das operações bancárias de empréstimo. Em contrapartida, é tributado pelo ISS sobre serviços prestados. O valor de aquisição dos títulos de crédito é apurado mediante a aplicação de um fator que inclui todos os custos incorridos pela empresa de *factoring*: despesas operacionais, impostos, custos de oportunidade do capital investido e margem de lucro esperada.

↑ Exemplos de aplicação →

► Exemplo 4.18

Admitamos que uma duplicata de \$100.000 com vencimento a dois meses será negociada com uma empresa de *factoring* que aplica os seguintes parâmetros:

- Custo de oportunidade do capital (i): 3% a.m.
- Impostos (PIS etc.): 1%
- Despesas fixas: 0,5%
- Despesas bancárias: 0,2%
- Margem de lucro desejada: 1,5%

a) Cálculos pelo critério de juros por fora (comercial):

- Cálculo da taxa de desconto:

$$i = \frac{d}{1 - d \times n} \Rightarrow d = \frac{i}{1 + i \times n} = \frac{0,03}{1 + 0,03 \times 2} = 2,8302\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo do fator do *factoring*:

Taxa de desconto	2,8302%
Despesas fixas	0,5%
Despesas bancárias	0,2%
Margem de lucro	1,5%
Fator antes dos impostos	5,0302%
Fator após impostos	$5,0302 / (1 - 0,01) = 4,9799\% \text{ a.m.}$

- Preço de compra:

$$\begin{aligned} \text{Preço de compra} &= \text{valor nominal} (1 - \text{fator após impostos} \times n) \\ &= \$100.000 \times (1 - 0,049799 \times 2) = \$90.040 \end{aligned}$$

- Custo efetivo da operação:

$$\$90.040 = \frac{\$100.000}{(1 + i_e)^2} \Rightarrow i_e = \left(\frac{\$100.000}{\$90.040} \right)^{1/2} - 1 = 5,3858\% \text{ a.m.}$$

b) Cálculos pelo critério de juros por dentro (racional):

- Preço de compra:

$$\begin{aligned} \text{Preço de compra} &= \text{valor nominal} / (1 + \text{fator após impostos}) \\ &= \$100.000 / (1 + 0,049799)^2 = \$90.737,68 \end{aligned}$$

- Custo efetivo da operação:

$$\$90.737,68 = \frac{\$100.000}{(1 + i_e)^2} \Rightarrow i_e = \left(\frac{\$100.000}{\$90.737,68} \right)^{1/2} - 1 = 4,9799\% \text{ a.m.}$$

▶ Exemplo 4.19

Uma duplicata de \$100.000 com vencimento em 60 dias foi negociada comercialmente com uma empresa de *factoring*. Considerando uma taxa efetiva *exponencial* da operação de 3% a.m., calcular o valor liberado pela duplicata.

Dados: $i_e = 3\%$ a.m., $N = \$100.000$, $n = 60$ dias, $V = ?$

$$\begin{aligned} (1 + i_e) &= \left(\frac{N}{V} \right)^{30/n} \\ (1,03) &= \left(\frac{\$100.000}{V} \right)^{30/60} \Rightarrow V = \$94.259,59 \end{aligned}$$

4.4 Hot money

São operações de curtíssimo prazo com a finalidade de atender às necessidades imediatas de caixa das empresas. Esse tipo de operação tem como referencial a taxa DI, acrescida de um *spread* cobrado pela instituição financeira, IOF, PIS e Cofins. Os contratos de *hot money* são geralmente garantidos por nota promissória.

↑ Exemplos de aplicação

▶ Exemplo 4.20

Uma operação de *hot money* no valor de \$1.000.000 foi contratada por quatro dias úteis. As taxas *over* mensais para cada dia são, respectivamente: 2,14%; 2,08%; 2,04%; 2,00%. O banco cobra um *spread* de 0,05%, e o IOF é de 0,004% ao dia, pago antecipadamente. Montar um quadro com os valores da operação e calcular seu custo efetivo.

O seguinte quadro mostra os valores envolvidos na operação de *hot money* e a sua evolução ao longo dos quatro dias:

Empréstimo contratado	\$1.000.000			
IOF	-\$160 (a)			
Valor liberado	\$999.840			
	1º dia	2º dia	3º dia	4º dia
Saldo devedor ao início do dia	1.000.000	1.001.213	1.002.408	1.003.591
Juros + spread	1.213 (b)	1.195 (c)	1.183 (d)	1.171 (e)
Saldo devedor ao final do dia	1.001.213	1.002.408	1.003.591	1.004.762

(a) $1.000.000 \times (0,0004 \times 4)$; (b) $1.000.000 \times (0,0214 / 30 + 0,0005)$; (c) $1.001.213 \times (0,0208 / 30 + 0,0005)$;
 (d) $1.002.408 \times (0,0204 / 30 + 0,0005)$; (e) $1.003.591 \times (0,02 / 30 + 0,0005)$.

- Custo efetivo da operação:

$$\begin{aligned} \$999.840 &= \frac{\$1.004.762}{(1 + i_e)^4} \Rightarrow i_e = \left(\frac{\$1.004.762}{\$999.840} \right)^{1/4} - 1 = 0,1228\% \text{ a.d.} \\ i_e &= (1,001228)^{30} - 1 = 3,75\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

▶ Exemplo 4.21

Uma empresa contratou um financiamento tipo *hot money* por oito dias corridos, sendo seis dias úteis. O financiamento foi contratado a uma taxa *over* mensal de 1,8% a.m., e a instituição financeira cobrou ainda um *spread* de 0,3% para todo o período. Admitindo que a taxa se mantenha constante, calcular o custo efetivo mensal da operação.

Dados: $dc = 8$, $du = 6$, taxa *over* mensal = 1,8% a.m., *spread* = 0,3%, $i_m = ?$

$$i_m = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du \times 30/dc} \times (1 + \text{spread}) - 1 = \left(1 + \frac{0,018}{30} \right)^{6 \times 30/8} \times \left(1 + \frac{0,3}{100} \right) - 1 = 1,6628\% \text{ a.m.}$$

4.5 Commercial papers

Commercial papers são títulos emitidos pelas sociedades por ações com a finalidade de captar capital de giro. São negociados no mercado por um valor descontado e recomprados pela empresa emitente pelo seu valor de face (valor nominal). São um importante instrumento de captação de recursos para capital de giro, fora do sistema bancário, para as empresas de capital aberto.

Algumas características desses títulos são:

- Não podem ser emitidos por instituições financeiras, sociedades corretoras e distribuidoras de valores mobiliários ou sociedades de arrendamento mercantil (empresas de *leasing*).
- Podem ser transferidos de titularidade mediante endosso em preto.
- Não costumam oferecer maiores garantias de liquidação, sendo entendidos como uma promessa de pagamento vinculada ao desempenho financeiro do emitente do título. O risco da aplicação é de inteira responsabilidade do investidor.
- Na data de vencimento, o *commercial paper* deve ser resgatado pela empresa emissora. O resgate implica a extinção do título, sendo vedada a sua manutenção em tesouraria.

- O prazo do papel não poderá ser inferior a 30 dias nem superior a 180 dias, contados da data de emissão.
- Somente poderão emitir novos *commercial papers* as empresas autorizadas que possuam registro atualizado na CVM (Comissão de Valores Mobiliários) e que estiverem em dia com as emissões anteriores.
- Os encargos pagos na colocação de *commercial papers* são geralmente um pouco inferiores àqueles cobrados por alternativas similares de financiamento de curto prazo, inclusive empréstimos bancários.
- Os juros são pagos aos investidores na forma de taxa de desconto, ou seja, o título apresenta um valor de face definido para o momento de seu resgate, sendo negociado no mercado por meio de deságio (desconto comercial).

Exemplos de aplicação

Exemplo 4.22

Uma empresa pretende captar capital de giro por meio de uma operação de lançamento de *commercial papers* no valor de \$10.000.000. O prazo é de 60 dias, e a taxa de desconto oferecida é de 2% ao bimestre. Considerando que o custo de emissão representa 1% do valor de captação, determinar o custo efetivo da operação.

Valor da emissão	\$10.000.000
– Desconto ($0,02 \times 10.000.000$)	–\$200.000
= Valor descontado	\$9.800.000
– Custos de emissão ($0,01 \times 10.000.000$)	–\$100.000
= Valor liberado à empresa	\$9.700.000

- Custo efetivo da operação:

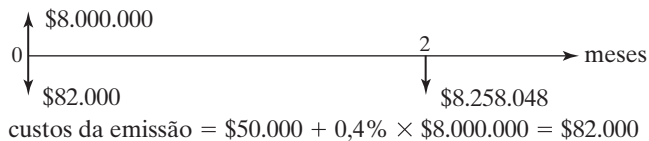
$$\$9.700.000 = \frac{\$10.000.000}{(1 + i_e)^2} \Rightarrow i_e = \left(\frac{\$10.000.000}{\$9.700.000} \right)^{1/2} - 1 = 1,5346\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.23

Uma empresa de capital aberto tem a necessidade de levantar \$8.000.000 para capital de giro. Pretende conseguir esse capital por meio da emissão de *commercial papers* nas seguintes condições:

- Valor da emissão: \$8.000.000
- Prazo: 60 dias
- Taxa de registro na CVM: 0,4%
- Despesas diversas com publicações e distribuição: \$50.000
- Custo de oportunidade para o investidor (comprador) do *commercial paper*: CDB — certificado de depósito bancário, com rendimento líquido de 1,5% a.m.

Para viabilizar a captação, a empresa deve oferecer uma remuneração (ao comprador) acima do custo de oportunidade, por exemplo, 1,6% a.m. O diagrama a seguir mostra o fluxo da emissão:



- Custo efetivo da emissão:

$$N = \$8.000.000 \times (1,016)^2 = \$8.258.048$$

$$i_e = \left(\frac{N}{V}\right)^{30/n} - 1 = \left(\frac{\$8.258.048}{\$8.000.000 - \$82.000}\right)^{30/60} - 1 = 2,1247\% \text{ a.m.}$$

4.6 Export note

Export note é o título representativo de uma operação de cessão de créditos de exportação, que são lastreados em negociações de vendas a importadores estrangeiros. É negociado por meio de um desconto, incorrendo o investidor em IR na fonte. Empresas com passivos em moeda estrangeira podem fazer *hedge*¹ cambial adquirindo *export notes*, protegendo-se desse modo contra as oscilações no câmbio.

4.7 Conta garantida

A conta garantida pode ser vista como uma espécie de cheque especial para pessoas jurídicas. Normalmente é uma conta vinculada à conta da empresa. À medida que o saldo da conta corrente se torna devedor, a conta garantida faz a provisão de forma automática. Alguns bancos exigem aviso prévio para transferências de recursos da conta garantida para a conta-corrente, uma vez que os recursos devem ficar disponíveis em *stand by* para atender às necessidades da empresa. No Brasil, muitas vezes os bancos exigem fianças para a abertura de conta garantida e os saques são tributados pelo IOF.

Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios, considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias.

1. Uma duplicata de \$180.000 é descontada quatro meses antes de seu vencimento. Considerando uma taxa de desconto de 60% a.s., calcular o valor do desconto e o valor liberado na modalidade de desconto comercial.

¹ Estratégia de proteção contra o risco de oscilações indesejáveis da taxa de câmbio.

2. Considerando que um banco aplica uma taxa simples de desconto de 15% a.m. e libera \$18.900 no desconto comercial de um título com vencimento para três meses, calcular o valor de resgate e a taxa de desconto efetiva linear da operação.
3. Calcular o valor liberado de um título com valor nominal de \$120.000 e vencimento para 180 dias, descontado comercialmente a uma taxa de desconto de 40% a.a.
4. Calcular a taxa de desconto efetiva linear para uma operação de desconto comercial de um título de \$135.000 descontado por \$120.000 quatro meses antes de seu vencimento.
5. Uma duplicata de \$86.000, com prazo de vencimento de três meses, teve valor liberado de \$80.000. Determinar a taxa de desconto mensal na modalidade racional.
6. Um lote de letras com valor de resgate de \$4.800.000 é adquirido por \$4.000.000. Considerando um prazo de vencimento de 120 dias, calcular a taxa de desconto (ao ano) e a rentabilidade efetiva linear da operação.
7. Um banco deseja uma rentabilidade efetiva linear de 180% a.a. em operações de compra de letras. Considerando que o lote de letras tem vencimento para 90 dias, determinar o PU sobre o qual se deve negociar em termos de desconto comercial e calcular a taxa de desconto mínima exigida.
8. Uma duplicata de \$880.000 foi descontada comercialmente oito meses antes do vencimento. Considerando uma taxa de desconto efetiva linear de 145% a.a., calcular o valor liberado pelo banco.
9. Uma promissória de \$450 sofreu um desconto comercial de \$54. Considerando uma taxa de desconto de 6% a.m., calcular o prazo da operação.
10. Um título de \$13.000, que vence em 120 dias, foi descontado comercialmente por \$11.400. Calcular a taxa de desconto (ao ano) e a taxa de desconto efetiva linear da operação.
11. Um título de \$240.000 foi descontado 43 dias antes do vencimento, pelo desconto comercial simples, aplicando-se determinada taxa de desconto. Considerando uma taxa de desconto efetiva linear da operação de 6% a.m., calcular o valor liberado.
12. Para operações de desconto comercial, um banco aplica uma taxa de desconto de 27% a.a. e cobra 2% sobre o valor nominal como TSB. Calcular as taxas de desconto efetivas lineares anuais para os prazos de um, três e seis meses.
13. Uma duplicata de \$72.000 com vencimento para cinco meses foi descontada comercialmente a uma taxa de desconto de 2% a.m. Considerando que foi paga uma tarifa de serviço bancário de 2,5% sobre o valor nominal do título, calcular o valor líquido liberado pelo banco e a taxa de desconto efetiva linear da operação.
14. Duas letras, uma de \$10.000 e outra de \$8.000, foram descontadas pelo desconto comercial simples, aplicando-se uma taxa de desconto de 36% a.a. Considerando que o valor do desconto total é de \$4.400 e que o prazo da segunda letra excede em dez dias o prazo da primeira, determinar os prazos e as taxas de desconto efetivas lineares das letras.
15. Duas letras pagáveis, respectivamente, em 150 e 120 dias, foram descontadas comercialmente a uma taxa de desconto de 5% a.m., e a soma dos valores dos descontos foi de \$53.000. Determinar os valores nominais dos títulos sabendo-se que, se essa operação fosse feita 20 dias mais tarde, a taxa de desconto seria de 8% a.m. e a soma dos valores dos descontos seria de \$72.000.
16. Dois títulos com prazos, respectivamente, de 60 e 90 dias foram descontados comercialmente à taxa de desconto de 6% a.m., produzindo os mesmos valores liberados para ambos os títulos. Considerando que a diferença entre o valor nominal (valor de resgate) do primeiro e o valor do desconto do segundo é de \$166.454,55, calcular os valores nominais dos títulos.
17. Dois títulos vencíveis, respectivamente, em 33 e 66 dias foram descontados comercialmente: o primeiro, à taxa de desconto de 40% a.a., e o segundo, à taxa de 38% a.a., totalizando um des-

conto de \$1.760. Considerando que o valor nominal do primeiro é a metade do valor nominal do segundo, calcular os valores nominais dos dois títulos.

18. Uma duplicata de \$20.000 foi descontada comercialmente 120 dias antes do vencimento. Considerando que o valor líquido liberado foi de \$18.000 e sabendo-se que foi cobrada uma comissão de 2% sobre o valor nominal da duplicata, calcular a taxa mensal de desconto e a taxa de desconto efetiva linear da operação.
19. Duas letras pagáveis, respectivamente, em 186 e 90 dias foram descontadas comercialmente a uma taxa de desconto de 5% a.m., e a soma dos valores dos descontos totalizou \$1.070. Se essa operação fosse feita dez dias mais tarde, a taxa de desconto seria de 6% a.m. e a soma dos descontos totalizaria \$1.184. Calcular os valores nominais dos títulos.
20. O possuidor de um título de \$20.000 com vencimento para três meses tem duas possibilidades: vendê-lo por \$19.500 a um particular ou descontá-lo comercialmente em um banco que aplica uma taxa de desconto de 1% a.m. Determinar qual transação é mais vantajosa.
21. Dois títulos, o primeiro com vencimento a 60 dias, e o segundo, a 90 dias, foram descontados racionalmente à taxa de desconto de 6% a.m. Considerando que os dois tiveram o mesmo valor liberado e que a diferença entre o valor nominal do primeiro e o valor do desconto do segundo é de \$4.160,91, calcular os valores nominais dos títulos.
22. Dois títulos foram descontados comercialmente 60 dias antes do vencimento à taxa de desconto de 4% a.m., totalizando um desconto de \$2.000. Considerando que o valor de resgate do segundo é o dobro do valor de resgate do primeiro, calcular os valores de resgate dos títulos.
23. A soma dos valores dos descontos e a soma dos valores líquidos liberados por duas promissórias descontadas comercialmente totalizaram, respectivamente, \$6.300 e \$143.700. O valor de resgate da segunda promissória é o dobro do valor de resgate da primeira e vence 30 dias depois. Considerando uma taxa de desconto de 2,1% a.m., determinar os valores de resgate e os prazos dos títulos.
24. Duas letras com prazos, respectivamente, de 40 e 120 dias foram descontadas comercialmente à taxa de desconto de 6% a.m., e a soma dos valores dos descontos totalizou \$24.800. Se a operação fosse feita dez dias mais tarde, teria sido aplicada uma taxa de desconto de 5% a.m., e a soma dos valores dos descontos comerciais totalizaria \$18.500. Determinar os valores nominais das letras.
25. Duas letras vencíveis, respectivamente, em 90 e 45 dias foram descontadas racionalmente a uma taxa de juros simples de 2% a.m., e a soma dos valores dos descontos foi de \$300. Calcular o valor total liberado pelas duas letras, sabendo-se que, se essa operação se realizasse 30 dias mais tarde, a soma dos valores dos descontos teria sido de \$180.
26. Uma nota promissória de \$5.000 foi descontada racionalmente 60 dias antes do vencimento à taxa de juros simples de 3% a.m. Calcular o valor líquido recebido pelo possuidor do título.
27. Um título de \$50.000 sofreu um desconto comercial de \$4.000. Considerando uma taxa de desconto efetiva linear de 10,87% a.m., determinar o prazo da operação.
28. Uma promissória de \$22.000 teve um desconto comercial de \$2.000. Considerando que a taxa efetiva exponencial da operação é de 4,8809% a.m., determinar o prazo da operação e a taxa de desconto mensal contratada.
29. Um banco emprestou \$100.000 por 40 dias a juros efetivos compostos de 26% a.a. Considerando que o banco desconte comercialmente uma promissória com valor nominal de \$50.022,36 a uma taxa de desconto de 4% a.m., determinar o prazo do desconto, de modo que as duas operações produzam o mesmo rendimento ao banco.
30. Um banco pode emprestar \$25.000 a juros efetivos de 42% a.a. ou empregar esse capital no desconto comercial de uma duplicata com valor nominal de \$25.000 e prazo de 90 dias. Qual deveria ser a taxa de desconto aplicada na operação, de modo que o banco ganhe os mesmos juros obtidos no empréstimo?

31. Um título com valor nominal de \$240.000 foi descontado comercialmente 60 dias antes do vencimento a uma taxa de desconto de 4% a.m. Calcular o valor líquido liberado ao seu portador e a taxa de desconto efetiva exponencial anual da operação.
32. Uma empresa descontou comercialmente, 100 dias antes do vencimento, uma duplicata de \$20.000. Considerando que o valor líquido liberado foi de \$19.000, calcular a taxa de desconto e a taxa de desconto efetiva exponencial anual mensal contratada da operação.
33. Calcular o valor nominal de uma nota promissória descontada comercialmente três meses antes do vencimento, de modo que seu valor liberado seja igual à soma dos valores liberados por três duplicatas com valores nominais, respectivamente, de \$100, \$500 e \$700, descontadas pelo mesmo prazo e taxa de desconto da nota promissória.
34. Uma promissória foi descontada comercialmente 180 dias antes de seu vencimento. Considerando que a taxa de desconto efetiva exponencial é de 2% a.m., determinar a taxa de desconto mensal contratada.
35. O quociente entre o valor nominal e o valor liberado por um título descontado comercialmente 60 dias antes do vencimento é 1,03. Calcular as taxas efetivas linear e exponencial da operação.
36. Um título com valor nominal de \$2.000 foi descontado comercialmente. Considerando que a taxa de desconto efetiva exponencial foi 3% a.m. e que a antecipação foi de dois meses, calcular a taxa mensal de desconto contratada e o valor do desconto.
37. Calcular a taxa de juros efetiva composta a que um banco deverá emprestar um capital de \$10.000 por quatro meses, de modo que tenha uma remuneração igual à obtida no desconto comercial de uma duplicata com valor nominal de \$20.000 pelo mesmo prazo à taxa de desconto de 2% a.m.
38. Determinar o PU de uma LTN com prazo de 98 dias úteis, sabendo-se que a taxa *over* anual projetada para esse período é de 18% a.a.
39. Uma instituição financeira comprou por \$ 888.000 um lote de LTNs com prazo de vencimento de 100 dias úteis. Determinar a taxa *over* anual da operação.
40. Um investidor pretende obter uma rentabilidade de 13% a.a. *over* na compra de um lote de LFTs com prazo de 125 dias úteis. Sabendo-se que a taxa Selic projetada para esse período é de 12% a.a. *over*, determinar qual deverá ser a cotação do título para que o investidor possa obter a rentabilidade requerida.

CAPÍTULO

Séries periódicas uniformes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Séries de pagamentos antecipados, postecipados e diferidos
- Cálculo das prestações, do principal e do montante de séries uniformes
- Taxa de juros em séries uniformes e mistas

As rendas certas, ou séries periódicas uniformes, podem ser divididas em séries postecipadas, antecipadas e diferidas.

As séries *postecipadas* são aquelas em que os pagamentos ocorrem no final de cada período e não na origem; por exemplo, pagamentos de fatura de cartão de crédito.

Nas séries *antecipadas*, os pagamentos são feitos no início de cada período respectivo; por exemplo, financiamentos com pagamento à vista.

Nas séries *diferidas*, o período de carência constitui-se em um prazo que separa o início da operação do período de pagamento da primeira parcela; por exemplo, promoções do tipo 'compre hoje e comece a pagar daqui a x dias'. Quando o primeiro pagamento ocorre no início do primeiro período após o término da carência, temos uma série diferida antecipada; quando ocorre no final, temos uma série diferida postecipada.

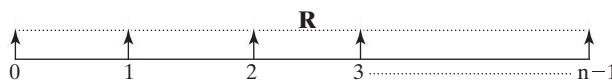
- Séries uniformes postecipadas

Na série postecipada, os pagamentos ocorrem no final de cada período:

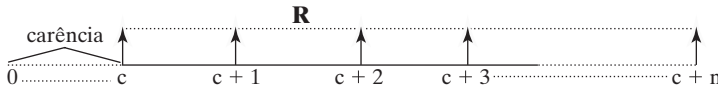


- Séries uniformes antecipadas

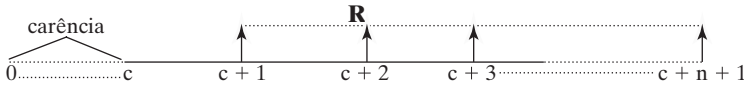
Na série antecipada, os pagamentos ocorrem no início de cada período:



- Séries uniformes diferidas
Série diferida antecipada:



Série diferida postecipada:

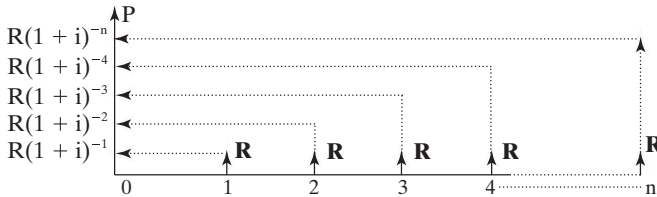


De acordo com a linha didática adotada neste livro, evitaremos neste capítulo o desenvolvimento desnecessário de equações de cálculo específicas para cada tipo de série uniforme. As equações das séries postecipadas, conjuntamente com o princípio de equivalência de capitais, permitem-nos resolver as diferentes situações relacionadas a séries uniformes. Ou seja, na resolução dos exemplos, preferimos explorar mais o lado intuitivo do que a utilização de equações de cálculo. Os casos particulares desse tópico da matemática financeira serão tratados por meio de exemplos ilustrativos.

5.1 Valor presente de séries periódicas uniformes

O valor presente de uma série de parcelas uniformes e postecipadas (termos vencidos) representa a soma das parcelas atualizadas para a data inicial do fluxo (data 0).

O diagrama de fluxo a seguir mostra o processo de desconto:



Valor presente dos termos da série:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n} \\
 &= R[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}]
 \end{aligned}$$

O somatório entre colchetes representa a soma dos termos de uma progressão geométrica finita. Utilizando a fórmula conhecida da soma das progressões geométricas, podemos desenvolver a seguinte expressão para o valor presente de uma série uniforme com n termos postecipados capitalizados à taxa efetiva i:

$$P = R \left[\frac{a_1 - a_n \times q}{1 - q} \right]$$

onde a_1 é o primeiro termo da série $= (1 + i)^{-1}$;
 a_n é o n -ésimo termo da série $= (1 + i)^{-n}$;
 q é a razão da série $= (1 + i)^{-1}$.

Substituindo as respectivas expressões, temos as seguintes fórmulas para o cálculo do principal e das prestações:

$$P = R \left[\frac{(1 + i)^{-1} - (1 + i)^{-n} \times (1 + i)^{-1}}{1 - (1 + i)^{-1}} \right] \Rightarrow P = R \times \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \times i} \right] = R \times a_{\overline{n}|i\%}$$

$$R = \frac{P}{\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \times i} \right]} = \frac{P}{a_{\overline{n}|i\%}}$$

As fórmulas anteriores permitem calcular o valor presente (P) de séries uniformes postecipadas e o valor unitário dos termos da série (R). A expressão matemática entre colchetes é conhecida como fator de *valor presente de séries uniformes*. Internacionalmente, a expressão recebe o símbolo $a_{\overline{n}|i\%}$, onde 'n' representa o número de termos da série e 'i', a sua taxa de capitalização.

↑ Exemplos de aplicação

Séries antecipadas e postecipadas

▶ Exemplo 5.1

Um bem cujo preço à vista é \$4.000 será pago em oito prestações mensais iguais que vencem ao fim de cada mês. Considerando que o juro composto cobrado é de 5% a.m., calcular o valor das prestações.

Dados: P = \$4.000, i = 5% a.m., n = 8, R = ?

- Cálculo das prestações:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{8}|5\%}} = \frac{\$4.000}{\left[\frac{(1,05)^8 - 1}{(1,05)^8 \times 0,05} \right]} = \frac{\$4.000}{6,46321} = \$618,89$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
4000 (CHS) (PV)	principal com sinal negativo
5 (i)	taxa de juros efetiva
8 (n)	número de prestações
(PMT) → 618,89	calcula o valor da prestação postecipada

O fator $a_{\overline{8}|5\%} = 6,46321$ pode ser calculado com o auxílio de uma calculadora que possua a função X^y ou observado nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro. Na HP 12c, PV é o principal ou valor presente, que significa o valor que temos na data 0; FV é o valor futuro, que será igual ao valor que teremos no fim do período; PMT é a prestação paga ou recebida.

Na HP 12c a diferença entre entradas e saídas será simbolizada pelo sinal negativo e positivo, conforme convenção do usuário. Se o principal (PV) fosse inserido com sinal positivo, as prestações (PMT) seriam calculadas com sinal negativo, ou vice-versa.

► **Exemplo 5.2**

Calcular o fator de valor presente de séries uniformes para $n = 18$ e $i = 5\%$.

$$a_{\overline{18}|5\%} = \left[\frac{(1,05)^{18} - 1}{(1,05)^{18} \times 0,05} \right] = 11,68968690$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
1 (CHS) (PMT)	
5 (i)	
18 (n)	
(PV) →	11,68968690

apaga a memória financeira
 prestação unitária negativa
 taxa de juros efetiva
 número de termos da série uniforme
 calcula o fator

► **Exemplo 5.3**

No Exemplo 5.1, considerando que no ato da compra foi paga uma entrada de 20% sobre o valor à vista, calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$4.000$, $i = 5\%$ a.m., $n = 8$, entrada (E) = \$800 (20% de \$4.000), $R = ?$

As prestações são calculadas sobre o financiamento efetivo (valor à vista menos a entrada):

$$R = \frac{P - E}{a_{\overline{8}|5\%}} = \frac{\$4.000 - \$800}{\left[\frac{(1,05)^8 - 1}{(1,05)^8 \times 0,05} \right]} = \frac{\$3.200}{6,46321} = \$495,11$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
3200 (CHS) (PV)	
5 (i)	
8 (n)	
(PMT) →	495,11

apaga a memória financeira
 principal com sinal negativo
 taxa de juros efetiva
 número de prestações
 calcula o valor da prestação

► **Exemplo 5.4**

No Exemplo 5.1, considerando que no ato da compra foi paga uma entrada de 20% juntamente com a primeira prestação (prestações antecipadas), calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$4.000$, $i = 5\%$ a.m., $n = 8$, entrada (E) = $R + \$800$, $R = ?$

As prestações são calculadas com base no financiamento efetivo (valor à vista menos a entrada e menos a primeira prestação, pagas no ato da compra):

$$R = \frac{\text{Financiamento efetivo}}{a_{n-1|i\%}} = \frac{P - E}{a_{7|5\%}} = \frac{\$4.000 - \$800 - R}{\left[\frac{(1,05)^7 - 1}{(1,05)^7 \times 0,05} \right]}$$

$$R = \frac{\$3.200 - R}{5,78637} \Rightarrow R = \$471,53$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
3200 (CHS) (PV)	principal com sinal negativo
5 (i)	taxa de juros efetiva
8 (n)	número de prestações
(g) (BEG) (PMT) → 471,53	calcula o valor da prestação <i>antecipada</i>

Observação: Nesse caso, as prestações são antecipadas (pagas no início de cada mês), portanto a calculadora financeira deve ser colocada no *modo antecipado*, pressionando-se as teclas **(g)(BEG)**. Quando esse modo está acionado, aparece no visor da máquina o termo BEGIN. Para desativá-lo e voltar ao modo postecipado, basta pressionar as teclas **(g)(END)**.

► Exemplo 5.5

Se uma pessoa entregar seu veículo usado na compra de um novo, ela pode abater \$7.500 do valor à vista, que é \$18.500. O saldo será pago por meio de determinada entrada mais 18 prestações mensais postecipadas de \$350 cada. Considerando que foram aplicados juros nominais de 72% a.a., capitalizados mensalmente, calcular o valor da entrada.

Dados: P = \$18.500, j = 72% a.a., k = 12, n = 18, R = \$350, entrada (E) = ?

- Taxa de juros efetiva mensal:

$$(1 + i_m) = \left(1 + \frac{0,72}{12} \right) \Rightarrow i_m = 6\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo das prestações:

As prestações são calculadas sobre o financiamento efetivo (valor à vista menos o valor do carro usado e menos a entrada):

$$R = \frac{\text{Financiamento efetivo}}{a_{18|6\%}}$$

$$\$350 = \frac{\$18.500 - \$7.500 - E}{\left[\frac{(1,06)^{18} - 1}{(1,06)^{18} \times 0,06} \right]} \Rightarrow E = \$7.210,34$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
350 (g) (END) (PMT)	
72 (g) (12÷)	
18 (n)	
(PV) 11.000 (+) → 7.210,34	

apaga a memória financeira
prestação *postecipada*
taxa de juros nominal capitalizada mensalmente
número de prestações
calcula o principal, e ao resultado é somado 11.000

Observação: Dado que no exemplo anterior a calculadora foi colocada no modo antecipado, pressionando-se as teclas **(g)(BEG)**, nesse exemplo foi necessário voltar ao modo postecipado, pressionando-se as teclas **(g)(END)**.

► Exemplo 5.6

A juros efetivos de 3% a.m., determinar o tempo necessário para liquidar um financiamento de \$842,36 por meio de prestações mensais postecipadas de \$120.

Dados: $i = 3\%$ a.m., $R = \$120$, $P = \$842,36$, $n = ?$

$$P = R \times a_{\overline{n}|i\%}$$

$$\$842,36 = \$120 \times \left[\frac{(1,03)^n - 1}{(1,03)^n \times 0,03} \right] \Rightarrow (1,03)^n = 1,266770081$$

Aplicando logaritmos: $n \times \log(1,03) = \log(1,266770081)$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(1,266770081)}{\log(1,03)} = 8 \text{ meses}$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
842,36 (PV)	
3 (i)	
120 (CHS) (PMT)	
(n) → 8	

apaga a memória
principal
taxa de juros efetiva
prestações
número de prestações

► Exemplo 5.7

Um equipamento cujo valor à vista é \$5.000 foi comprado em 26 de maio por meio de uma entrada de \$2.000, prestações de \$1.000 a cada 30 dias e uma quantia residual paga alguns dias depois da última prestação. Determinar o valor da quantia residual e a data (dia e mês) em que será quitado totalmente o financiamento, considerando que o banco financiador cobra juros efetivos de 5% a.m.

Dados: $i = 5\%$ a.m., $P = \$3.000$, $R = \$1.000$, $q = ?$, data = ?

$$P = R \times a_{\overline{n}|5\%} \Rightarrow \$3.000 = \$1.000 \times \left[\frac{(1,05)^n - 1}{(1,05)^n \times 0,05} \right] \Rightarrow (1,05)^n = 1,176470588$$

$$\begin{aligned} \text{Aplicando logaritmos: } n &= \frac{\log(1,176470588)}{\log(1,05)} = 3,3309773 \text{ meses} \\ &= 99,9293 \text{ dias } (3,3309773 \times 30) \end{aligned}$$

A máquina estará totalmente paga em cem dias por meio de três pagamentos de \$1.000 a cada 30 dias e uma quantia residual (q) de \$325,63 paga dez dias depois da última prestação (no 100º dia). O valor dessa quantia residual pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\$3.000 = \$1.000 \times \left[\frac{(1,05)^3 - 1}{(1,05)^3 \times 0,05} \right] + \frac{q}{(1,05)^{100/30}} \Rightarrow q = \$325,63$$

Usando a tábua para contagem de dias entre duas datas (ver p. 10), pode-se determinar a data em que o equipamento estará totalmente pago:

$$\begin{aligned} \text{número de dias da data posterior (?)} &= + Y \\ \text{número de dias da data anterior (26 de maio)} &= \underline{-146} \\ \text{prazo} &= 100 \end{aligned}$$

Logo, $Y = 146 + 100 = 246$, que na tábua corresponde ao dia 3 de setembro.

Observação: A máquina HP 12c arredonda para quatro o número de prestações, podendo levar-nos a pensar que se trata de quatro prestações de \$1.000, o que não é correto, pois são três prestações de \$1.000 e uma quarta de \$325,63. Portanto, quando o prazo é fracionário, a incógnita deve ser resolvida usando-se logaritmos, tal como mostrado neste exemplo.

► Exemplo 5.8

Quanto se deve aplicar hoje em um investimento para poder retirar \$100.000 no fim de cada mês, durante os próximos 20 meses, considerando uma taxa de juros nominal de 120% a.a., capitalizada mensalmente?

Dados: $R = \$100.000$, $n = 20$ meses, $j = 120\%$ a.a., $k = 12$, $P = ?$

- Taxa efetiva ao mês:

$$(1 + i_m) = \left(1 + \frac{1,20}{12} \right) \Rightarrow i_m = 10\% \text{ a.m.}$$

- Valor da aplicação:

$$\begin{aligned} P &= R \times a_{\overline{20}|10\%} \\ &= \$100.000 \times \left[\frac{(1,10)^{20} - 1}{(1,10)^{20} \times 0,10} \right] = \$100.000 \times 8,51356 = \$851.356 \end{aligned}$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
100.000 (CHS) (PMT)	
120 (g) (12÷)	
20 (n)	
(PV) → 851.356	

apaga a memória financeira
prestação com sinal negativo
taxa de juros nominal capitalizada mensalmente
número de prestações
calcula o principal

► Exemplo 5.9

Um empréstimo será liquidado em oito prestações de \$60.000 pagas ao final de cada mês. Considerando uma taxa de juros efetiva de 15% a.m., determinar o valor do empréstimo.

Dados: $R = \$60.000$, $i = 15\%$ a.m., $n = 8$, $P = ?$

O valor do empréstimo deve ser igual ao valor presente das prestações:

$$P = R \times a_{\overline{8}|15\%}$$

$$= \$60.000 \times \left[\frac{(1,15)^8 - 1}{(1,15)^8 \times 0,15} \right] = \$60.000 \times 4,4873215 = \$269.239,29$$

► Exemplo 5.10

Um financiamento de \$450.000 foi contratado a juros efetivos de 20% a.a., devendo ser amortizado em 12 prestações mensais postecipadas iguais. Calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$450.000$, $i_a = 20\%$ a.a., $n = 12$ meses, $R = ?$

- Taxa de juros efetiva ao mês:

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow i_m = (1,20)^{1/12} - 1 = 1,53095\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo do valor da prestação:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{12}|1,53095\%}} = \frac{\$450.000}{\left[\frac{(1,0153095)^{12} - 1}{(1,0153095)^{12} \times 0,0153095} \right]} = \frac{\$450.000}{10,88651} = \$41.335,57$$

► Exemplo 5.11

Calcular o valor das prestações mensais postecipadas iguais e consecutivas que liquidam um débito de \$200.000 no prazo de seis meses, sendo a taxa de juros efetiva de 18% a.m. para os três primeiros meses e de 20% para os demais.

Dados: $P = 200.000$, $i_{1-3} = 18\%$ a.m., $i_{4-6} = 20\%$ a.m., $R = ?$

$$P = \underbrace{R \times a_{\overline{3}|18\%}}_{\text{valor presente das três primeiras prestações}} + \underbrace{R \times a_{\overline{3}|20\%} \times \left[\frac{1}{(1,18)^3} \right]}_{\text{valor presente das três últimas prestações}}$$

$$\$200.000 = R \left[\frac{(1,18)^3 - 1}{(1,18)^3 \times 0,18} \right] + R \left[\frac{(1,20)^3 - 1}{(1,20)^3 \times 0,20} \right] \times \left[\frac{1}{(1,18)^3} \right]$$

$$\$200.000 = R \times 2,17427 + R \times 2,10648 \times \left[\frac{1}{1,64303} \right] \Rightarrow R = \$57.864,73$$

► Exemplo 5.12

Um financiamento de \$20.000 será pago em oito prestações mensais postecipadas. Considerando que a taxa de juros efetiva cobrada pela financeira é de 8% a.m., calcular o valor da comissão de abertura de crédito, cobrada do cliente, que permita à financeira auferir uma rentabilidade de 10% a.m. na operação.

Dados: $P = \$20.000$, $n = 8$, $i = 8\%$ a.m., rentabilidade = 10% a.m., comissão = ?

- Prestações:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{8}|8\%}} = \frac{\$20.000}{\left[\frac{(1,08)^8 - 1}{(1,08)^8 \times 0,08} \right]} = \frac{\$20.000}{5,74664} = \$3.480,29$$

- Valor presente das prestações:

$$P = R \times a_{\overline{8}|10\%} = \$3.480,29 \times \left[\frac{(1,10)^8 - 1}{(1,10)^8 \times 0,10} \right]$$

$$= \$3.480,29 \times 5,3349262 = \$18.567,12$$

- Valor da comissão:

$$\text{comissão} = \$20.000 - \$18.567,12 = \$1.432,88$$

► Exemplo 5.13

Em quantos meses uma pessoa consegue liquidar um empréstimo de \$1.895.395 pagando prestações mensais postecipadas de \$500.000 a juros efetivos de 10% a.m.?

Dados: $P = \$1.895.395$, $R = \$500.000$, $i = 10\%$ a.m., $n = ?$

$$P = R \times a_{\overline{n}|10\%}$$

$$\$1.895.395 = \$500.000 \times a_{\overline{n}|10\%} \Rightarrow a_{\overline{n}|10\%} = 3,79079$$

Nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro, tem-se que $a_{\overline{5}|10\%} = 3,79079$; consequentemente, o número de prestações mensais que liquidam o empréstimo é igual a cinco.

Matematicamente, o valor de n pode ser calculado:

$$a_{\overline{n}|10\%} = 3,79079$$

$$\left[\frac{(1,10)^n - 1}{(1,10)^n \times 0,10} \right] = 3,79079 \Rightarrow (1,10)^n = 1,6105108$$

Aplicando logaritmos e destacando n :

$$n \times \ln(1,10) = \ln(1,6105108) \Rightarrow n = \frac{\ln(1,6105108)}{\ln(1,10)} = 5$$

► Exemplo 5.14

Uma indústria financia suas vendas a prazo aplicando juros efetivos de 10% a.m. Determinar o valor das prestações postecipadas para uma venda de \$250.000, considerando que há duas alternativas de pagamento: a) em 12 prestações mensais; b) em quatro prestações trimestrais.

Dados: $i = 10\%$ a.m., $n = 12$ ou 4 , $P = \$250.000$, $R = ?$

a) Prestação mensal:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{12}|10\%}} = \frac{\$250.000}{\left[\frac{(1,10)^{12} - 1}{(1,10)^{12} \times 0,10} \right]} = \frac{\$250.000}{6,81369} = \$36.690,83$$

b) Prestação trimestral:

• Taxa equivalente ao trimestre:

$$(1 + i_t) = (1 + i_m)^3 \Rightarrow i_t = (1,10)^3 - 1 = 0,3310 = 33,10\% \text{ a.t.}$$

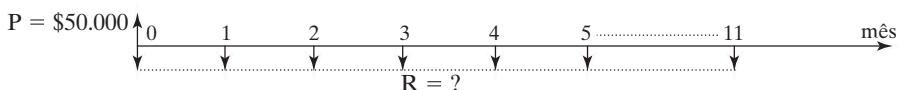
• Cálculo da prestação trimestral:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{4}|33,10\%}} = \frac{\$250.000}{\left[\frac{(1,3310)^4 - 1}{(1,3310)^4 \times 0,3310} \right]} = \frac{\$250.000}{2,05852} = \$121.446,64$$

► Exemplo 5.15

Uma compra no valor de \$50.000 foi financiada em 12 prestações mensais antecipadas. Considerando juros efetivos de 8% a.m., calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$50.000$, $n = 12$, $i = 8\%$ a.m., $R = ?$



- Cálculo das prestações:

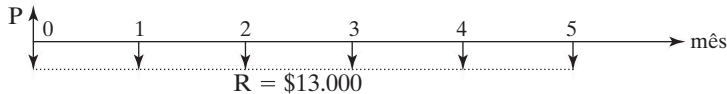
As prestações são calculadas sobre o financiamento efetivo (\$50.000 menos a prestação paga no ato):

$$R = \frac{\text{Financiamento efetivo}}{a_{\overline{n-1}|i\%}} = \frac{\$50.000 - R}{\left[\frac{(1,08)^{11} - 1}{(1,08)^{11} \times 0,08} \right]} = \frac{\$50.000 - R}{7,13896} \Rightarrow R = \$6.143,29$$

► **Exemplo 5.16**

Uma pessoa deve pagar por um financiamento seis prestações mensais antecipadas de \$13.000 cada uma. Calcular o valor do financiamento efetivo, visto que a taxa de juros cobrada é de 15% a.m.

Dados: $n = 6$, $R = \$13.000$, $i = 15\%$ a.m., financiamento efetivo = ?



$$P = \$13.000 + \$13.000 \times a_{\overline{n-1}|15\%} = \$13.000 + \$13.000 \times \left[\frac{(1,15)^5 - 1}{(1,15)^5 \times 0,15} \right]$$

$$= \$13.000 + \$13.000 \times 3,35216 = \$56.578,02$$

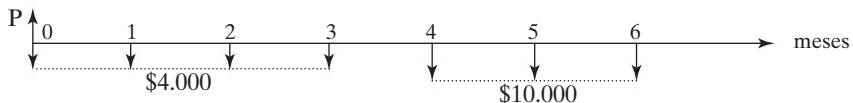
O financiamento efetivo é igual a \$56.578,02 menos a primeira prestação paga no ato:

$$\text{Financiamento efetivo} = \$56.578,02 - \$13.000 = \$43.578,02$$

► **Exemplo 5.17**

Uma empresa aplica juros efetivos de 12% a.m. nas vendas a prazo e exige a quitação em sete prestações mensais antecipadas. Considerando que em determinada venda realizada o valor de cada uma das quatro primeiras prestações foi de \$4.000 e das três últimas, de \$10.000, calcular o valor do financiamento efetivo.

Dados: $n = 7$, $R = \$4.000$ e $\$10.000$, $i = 12\%$ a.m., financiamento efetivo = ?



- Cálculo do principal:

$$P = \underbrace{\{ \$4.000 + \$4.000 \times a_{\overline{3}|12\%} \}}_{\text{valor presente das quatro primeiras prestações}} + \underbrace{\{ \$10.000 \times a_{\overline{3}|12\%} \times (1,12)^{-3} \}}_{\text{valor presente das três últimas prestações}}$$

$$= \left\{ \$4.000 + \$4.000 \times \left[\frac{(1,12)^3 - 1}{(1,12)^3 \times 0,12} \right] \right\} + \left\{ \$10.000 \times \left[\frac{(1,12)^3 - 1}{(1,12)^3 \times 0,12} \right] \times \frac{1}{(1,12)^3} \right\}$$

$$= \left\{ \$4.000 + \$4.000 \times 2,40183 \right\} + \left\{ \$10.000 \times 2,40183 \times 0,71178 \right\} = \$30.703,09$$

- Financiamento efetivo:

O financiamento efetivo é igual ao principal menos a primeira prestação paga no ato:

$$\text{Financiamento efetivo} = P - \$4.000 = \$30.703,09 - \$4.000 = \$26.703,09$$

Exemplo 5.18

Para poder sacar \$800/mês, uma pessoa aplicou \$10.000 a juros efetivos de 2% a.m. Quantos saques mensais poderão ser efetuados se o primeiro inicia-se um mês depois da aplicação?

Dados: $P = \$10.000$, $i = 2\%$ a.m., $R = \$800$, $n = ?$

$$P = R \times a_{\overline{n}|2\%} \Rightarrow \$10.000 = \$800 \times \left[\frac{(1,02)^n - 1}{(1,02)^n \times 0,02} \right] \Rightarrow (1,02)^n = 1,33333333$$

$$\text{Aplicando logaritmos: } n = \frac{\log(1,33333333)}{\log(1,02)} = 14,5275$$

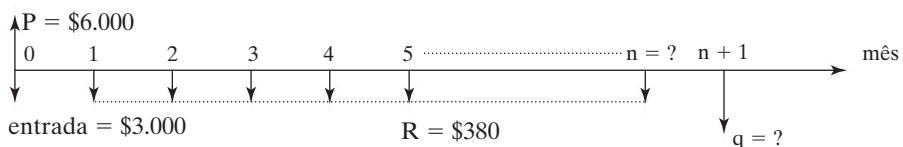
Podem ser efetuados 14 saques mensais de \$800 e um último de \$423,95 no 15º mês:

$$\$10.000 = \$800 \times \left[\frac{(1,02)^{14} - 1}{(1,02)^{14} \times 0,02} \right] + \frac{q}{(1,02)^{15}} \Rightarrow q = \$423,95$$

Exemplo 5.19

Um bem, cujo valor à vista é de \$6.000, será pago por meio de uma entrada de 50%, mais tantas prestações mensais postecipadas de \$380 quantas forem necessárias e um pagamento final inferior ao valor da prestação, que deve ser efetuado um mês após a data do vencimento da última parcela. A juros efetivos de 4% a.m., determinar o número de prestações e o valor do pagamento final.

Dados: $P = \$6.000$, entrada (50%) = \$3.000, $R = \$380$, $i = 4\%$ a.m., $n = ?$, $q = ?$



Pelo princípio de equivalência de capitais, podemos montar a equação de valor igualando o valor à vista ao valor presente do fluxo de pagamentos da alternativa *compra parcelada*:

$$\$6.000 = \$3.000 + \$380 \times a_{\overline{n}|4\%} + \frac{q}{(1,04)^{n+1}}$$

Uma solução direta não existe, dado que temos uma única equação e duas incógnitas: n e q . Ignorando o pagamento final (q), o valor presente das prestações é o seguinte:

- Se o número de prestações for igual a nove ($n = 9$):

$$\Rightarrow \$380 \times a_{\overline{9}|4\%} = \$380 \times 7,43533 = \$2.825,43$$

- Se o número de prestações for igual a dez ($n = 10$):

$$\Rightarrow \$380 \times a_{\overline{10}|4\%} = \$380 \times 8,11090 = \$3.082,14$$

Consequentemente, o número de prestações deve ser inferior a dez, caso contrário o valor presente das prestações excederia o valor do financiamento efetivo ($\$3.082,14 > \$3.000,00$). Logo, o financiamento será liquidado em nove prestações de $\$380$ mais um pagamento final no décimo mês. O valor desse pagamento final é o seguinte:

$$\$6.000 = \$3.000 + \$380 \times a_{\overline{9}|4\%} + \frac{q}{(1,04)^{10}}$$

$$\$3.000 = \$380 \times 7,43533 + \frac{q}{1,4802443} \Rightarrow q = \$258,41$$

▶ Exemplo 5.20

Uma pessoa deseja comprar um microcomputador e dispõe de quatro alternativas de pagamento:

- pagamento à vista de $\$2.300$;
- pagamento de oito prestações mensais de $\$431,12$ cada;
- pagamento de quatro prestações mensais de $\$965,75$ cada, sendo a primeira paga daqui a quatro meses;
- um único pagamento de $\$4.930,26$ daqui a oito meses.

Considerando juros efetivos de 10% a.m., qual será o melhor esquema de pagamento?

- Cálculo dos valores presentes dos planos de pagamento:

a) $P = \$2.300$

b) $P = \$431,12 \times a_{\overline{8}|10\%} = \$431,12 \times \left[\frac{(1,10)^8 - 1}{(1,10)^8 \times 0,10} \right] = \$431,12 \times 5,33493 = \2.300

c) $P = [\$965,75 \times a_{\overline{4}|10\%}] \times (1,10)^{-3} = \$965,75 \times \left[\frac{(1,10)^4 - 1}{(1,10)^4 \times 0,10} \right] \times \left[\frac{1}{(1,10)^3} \right]$
 $= \$965,75 \times 3,16987 \times 0,75131 = \2.300

$$d) P = \$4.930,26 \times \left[\frac{1}{(1,10)^8} \right] = \$4.930,26 \times 0,46651 = \$2.300$$

Do ponto de vista financeiro, as quatro alternativas são equivalentes, visto que, à taxa de juros de 10% a.m., os respectivos valores presentes são iguais (\$2.300). A escolha do melhor plano poderá, então, ser feita considerando-se a situação particular da pessoa. Por exemplo, se ela dispõe dos recursos necessários (\$2.300) e não vislumbra alternativas para aplicar seu dinheiro no mercado financeiro, obtendo no mínimo juros de 10% a.m., nesse caso talvez seja melhor comprar à vista.

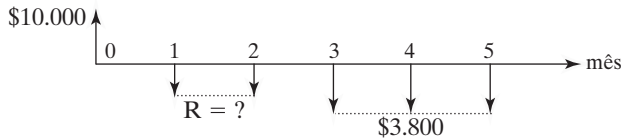
Exemplo 5.21

Um financiamento de \$10.000 será pago em cinco prestações postecipadas. Considerando que as três últimas são de \$3.800 cada e que a taxa de juros efetiva aplicada é de 5% a.m., determinar o valor de cada uma das duas primeiras prestações.

Dados: $P = \$10.000$, $n = 5$, $i = 5\%$ a.m., $R = ?$

Financiamento efetivo = valor presente das prestações

$$\begin{aligned} \$10.000 &= R \times a_{\overline{2}|5\%} + \frac{\$3.800 \times a_{\overline{3}|5\%}}{(1,05)^2} = R \times 1,85941 + \frac{\$3.800 \times 2,723248}{1,10250} \\ \Rightarrow R &= (\$10.000 - \$9.386,25)/1,85941 = \$330,08 \end{aligned}$$



Séries diferidas

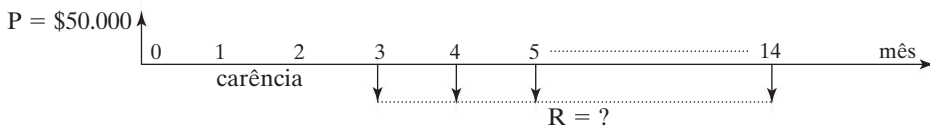
Exemplo 5.22

Um financiamento de \$50.000 será pago em 12 prestações mensais a juros efetivos de 8% a.m. Considerando que foi estipulado um período de carência de três meses, calcular o valor das prestações antecipadas e postecipadas.

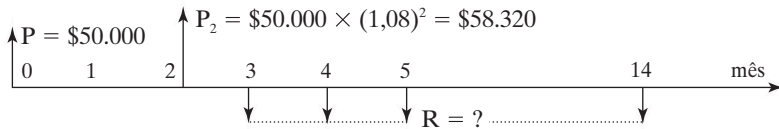
Dados: $P = \$50.000$, $n = 12$, $c = 3$, $i = 8\%$ a.m., $R = ?$

a) Prestações antecipadas:

No caso de as prestações serem antecipadas, a primeira parcela será paga no início do primeiro mês que se segue ao término da carência:



Durante a carência, os juros são capitalizados e incorporados ao principal, logo as prestações devem ser calculadas sobre o principal capitalizado 'c - 1' períodos, onde c é a carência:

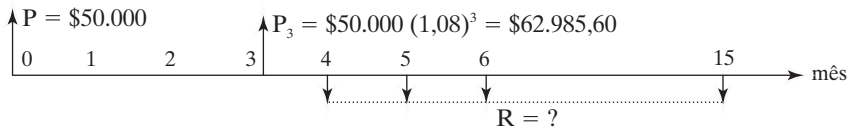


$$R = \frac{P_2}{a_{\overline{12}|8\%}} = \frac{P(1+i)^{c-1}}{a_{\overline{12}|8\%}} = \frac{\$50.000 \times (1,08)^2}{\left[\frac{(1,08)^{12} - 1}{(1,08)^{12} \times 0,08} \right]} = \frac{\$58.320}{7,53608} = \$7.738,77$$

b) Prestações postecipadas:

No caso de as prestações serem postecipadas, o pagamento da primeira parcela ocorrerá no fim do primeiro mês que se segue após o término da carência. Logo, as prestações deverão ser calculadas sobre o principal capitalizado durante 'c' períodos, onde c é a carência:

$$R = \frac{P_3}{a_{\overline{12}|8\%}} = \frac{\$62.985,60}{7,53608} = \$8.357,87$$



Exemplo 5.23

Um financiamento de \$40.000 será pago em oito prestações mensais de \$6.413,44. O início do pagamento das prestações será logo ao término de determinado período de carência. Considerando juros efetivos de 3% a.m., determinar o período de carência.

Dados: P = \$40.000, n = 8, i = 3% a.m., R = \$6.413,44, c = ?

Dada a carência, as prestações devem ser calculadas com base no principal capitalizado por c - 1 meses:

$$R = \frac{P(1+i)^{c-1}}{a_{\overline{8}|3\%}}$$

$$\$6.413,44 = \frac{\$40.000 \times (1,03)^{c-1}}{\left[\frac{(1,03)^8 - 1}{(1,03)^8 \times 0,03} \right]} = \frac{\$40.000 \times (1,03)^{c-1}}{7,019692} \Rightarrow (1,03)^{c-1} = 1,12550937$$

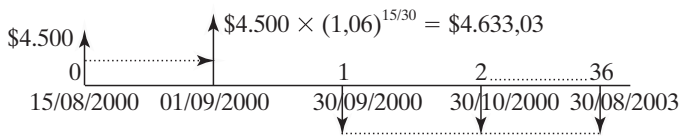
Aplicando logaritmos: $(c - 1) \times \ln 1,03 = \ln 1,12550937 \Rightarrow c = \frac{\ln 1,12550937}{\ln 1,03} + 1 = 5$

► Exemplo 5.24

Um empréstimo de \$4.500 contratado em 15 de agosto de 2000 será pago por meio de 36 prestações mensais a juros efetivos de 6% a.m. Considerando que a primeira prestação deverá ser paga 45 dias depois da data do contrato de financiamento, calcular o valor da prestação mensal, admitindo que os juros sejam capitalizados e incorporados ao principal já a partir da data de contratação.

Dados: $P = \$4.500$, $i = 6\%$ a.m., $n = 36$, $R = ?$

$$R = \frac{\text{Financiamento capitalizado 15 dias}}{a_{\overline{36}|6\%}} = \frac{\$4.500 \times (1,06)^{15/30}}{a_{\overline{36}|6\%}} = \frac{\$4.633,03}{14,62099} = \$316,88$$

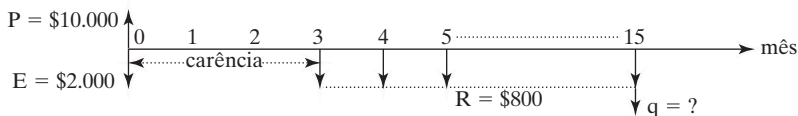


O empréstimo inicial foi capitalizado por 15 dias para obter um fluxo de caixa com pagamentos postecipados e, dessa forma, possibilitar o cálculo das prestações mensais aplicando a fórmula para fluxos postecipados. Foi considerado o mês comercial de 30 dias.

► Exemplo 5.25

Um bem cujo valor à vista é de \$10.000 será pago por meio de uma entrada de 20%, mais 13 prestações antecipadas mensais de \$800 cada e um pagamento final junto com a última prestação. Considerando juros efetivos de 4% a.m. e um período de carência de três meses, calcular o valor do pagamento final.

Dados: $P = \$10.000$, entrada (E) = \$2.000, $R = \$800$, $i = 4\%$ a.m., $q = ?$



Como as prestações são antecipadas, seu pagamento começa no início do primeiro mês após o término da carência. Pelo princípio de equivalência de capitais, o valor à vista é igual ao valor presente do fluxo de pagamentos da alternativa *compra parcelada*. Logo:

$$\begin{aligned} \$10.000 &= \$2.000 + \frac{\$800 \times a_{\overline{13}|4\%}}{(1,04)^2} + \frac{q}{(1,04)^{15}} \\ \$8.000 &= \frac{\$800 \times 9,98565}{1,08160} + \frac{q}{1,80094} \Rightarrow q = \$1.106,08 \end{aligned}$$

5.2 Montante de séries periódicas uniformes

O valor futuro ou montante de uma série de pagamentos ou recebimentos uniformes será igual à soma dos montantes de cada prestação em determinada data futura, calculados pela mesma taxa de juros. Considerando-se uma série postecipada com n termos uniformes, o seu valor presente é:

$$P = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

Uma expressão para o montante pode ser obtida se capitalizarmos por n períodos o valor presente da série:

$$S = P(1+i)^n = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \times (1+i)^n$$

$$\Rightarrow S = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = R \times s_{\overline{n}|i\%}$$

$$R = \frac{S}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]} = \frac{S}{s_{\overline{n}|i\%}}$$

As fórmulas apresentadas permitem o cálculo do montante e do valor unitário dos termos da série postecipada. A expressão entre colchetes é conhecida como *fator de valor futuro de séries uniformes*. Internacionalmente, é representado pelo símbolo $s_{\overline{n}|i\%}$. Para entender melhor o processo de capitalização implícito nas fórmulas de cálculo de séries de pagamentos uniformes, mostramos no quadro a seguir os cálculos necessários para chegar ao montante de cinco depósitos mensais iguais, aplicados a juros efetivos de 10% a.m.:

Mês	Depósito	Períodos de capitalização	Cálculo	Montante no 5º mês
1	360	4	$360 \times (1,1)^4$	\$527,08
2	360	3	$360 \times (1,1)^3$	\$479,16
3	360	2	$360 \times (1,1)^2$	\$435,60
4	360	1	$360 \times (1,1)^1$	\$396,00
5	360	0	$360 \times (1,1)^0$	\$360,00
Total:				\$2.197,84

No quadro, cada depósito foi capitalizado até o quinto mês de modo que possamos calcular o montante nessa data. Podemos também usar diretamente a fórmula para o cálculo do montante dos cinco depósitos ao término do quinto mês:

$$S = R \times s_{\overline{n}|i\%} = \$360 \times \left[\frac{(1,10)^5 - 1}{0,10} \right] = \$360 \times 6,1051 = \$2.197,84$$

É claro que o modo mais simples é calcular diretamente por meio da fórmula de montante, mas esperamos que os cálculos do quadro ajudem o leitor a entender o mecanismo de capitalização implícito no cálculo direto.

↑ Exemplos de aplicação

▶ Exemplo 5.26

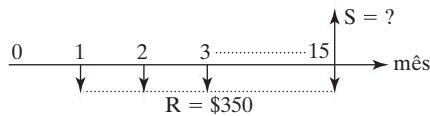
Quanto uma pessoa acumularia no fim de 15 meses se depositasse a cada final de mês \$350 em uma aplicação que paga juros efetivos de 5% ao mês?

Dados: $n = 15$ meses, $R = \$350$, $i = 5\%$ a.m., $S = ?$

$$S = R \times s_{\overline{15}|5\%}$$

$$= 350 \times \left[\frac{(1 + 0,05)^{15} - 1}{0,05} \right] = 350 \times 21,57856 = 7.552,50$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
350 (CHS) (PMT)	valor do depósito com sinal negativo
15 (n) 5 (i)	número de depósito e taxa de juros efetiva
(FV) → 7.552,50	calcula o montante



▶ Exemplo 5.27

Calcular o fator de valor futuro (montante) de séries uniformes para $n = 18$ e $i = 5\%$.

$$s_{\overline{18}|5\%} = \left[\frac{(1,05)^{18} - 1}{0,05} \right] = 28,13238467$$

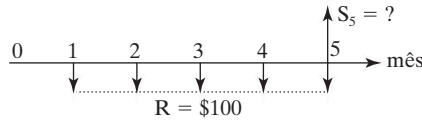
Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
1 (CHS) (PMT)	prestação unitária negativa
5 (i)	taxa de juros efetiva
18 (n)	número de termos da série uniforme
(FV) → 28,13238467	calcula o fator

▶ Exemplo 5.28

Calcular o capital formado daqui a cinco meses mediante cinco aplicações mensais e consecutivas de \$100 cada. Considere que os depósitos são realizados: a) o primeiro daqui a 30 dias; b) o primeiro hoje. Os juros são calculados à razão de 10% a.m.

Dados: $R = \$100$, $n = 5$, $i = 10\%$, $S_5 = ?$

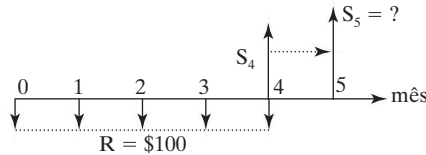
a) Primeiro depósito daqui a um mês (postecipado):



$$S_5 = R \times s_{\overline{5}|10\%} = \$100 \times \left[\frac{(1,10)^5 - 1}{0,10} \right] = \$100 \times 6,10510 = \$610,51$$

b) Primeiro pagamento no ato (antecipado):

$$S_5 = (S_4) \times (1,10) = (\$100 \times 6,10510) \times (1,10) = \$671,56$$



Atenção: Na série postecipada, o produto do valor da prestação vezes o fator representa o montante da série ao fim do quinto mês (coincide com o período em que ocorre o último termo da série). No caso antecipado, esse produto representa o montante ao fim do quarto mês (coincide com o período em que ocorre o último termo da série), sendo necessário capitalizá-lo por mais um período (do quarto ao quinto mês), pois o exemplo pede calcular o montante no quinto mês.

O quadro a seguir mostra o valor do montante nos diversos anos para os casos postecipado e antecipado. Observe-se que no caso antecipado os juros são auferidos desde o primeiro período, resultando em um montante maior que o da série postecipada:

Mês	Série postecipada			Série antecipada		
	Prestação	Juros	Montante	Prestação	Juros	Montante
1	100,00	0,00	100,00	100,00	10,00	110,00
2	100,00	10,00	210,00	100,00	21,00	231,00
3	100,00	21,00	331,00	100,00	33,10	364,10
4	100,00	33,10	464,10	100,00	46,41	510,51
5	100,00	46,41	610,51	100,00	61,05	671,56

► **Exemplo 5.29**

Um financiamento de \$12.000 será pago em 15 prestações mensais consecutivas ao final de cada mês. Considerando uma taxa de juros efetiva de 10% a.m., calcular o valor das prestações e o valor do montante na época do pagamento da última prestação.

Dados: $P = \$12.000$, $n = 15$, $i = 10\%$ a.m., $R = ?$, $S = ?$

a) Cálculo das prestações:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{15}|10\%}} = \frac{\$12.000}{\left[\frac{(1,10)^{15} - 1}{0,10} \right]} = \frac{\$12.000}{7,60608} = \$1.577,68$$

b) Cálculo do montante:

Podemos calcular o montante no 15º mês de duas formas:

• Capitalizando o financiamento:

$$S = \$12.000 \times (1,10)^{15} = \$12.000 \times 4,1725 = \$50.127$$

• Capitalizando as prestações:

$$S = \$1.577 \times s_{\overline{15}|10\%} = \$1.577,68 \times \left[\frac{(1,10)^{15} - 1}{0,10} \right] = \$1.577,68 \times 31,77248 = \$50.127$$

Exemplo 5.30

Uma pessoa deseja comprar um bem cujo valor à vista é de \$3.840. Para tanto, resolve começar hoje a efetuar quatro depósitos trimestrais iguais em uma aplicação financeira que rende juros efetivos de 12,55% a.a. Considerando que a compra será efetuada um trimestre após o último depósito, calcular o valor das aplicações trimestrais de modo que seja possível efetuar a compra com o valor de resgate do investimento.

Dados: $S_4 = \$3.840$, $n = 4$, $i_a = 12,55\%$ a.a., $R = ?$

• Taxa de juros efetiva trimestral:

$$(1 + i_a) = (1 + i_t)^4$$

$$(1,1255) = (1 + i_t)^4 \Rightarrow i_t = (1,1255)^{1/4} - 1 = 3\% \text{ a.t.}$$

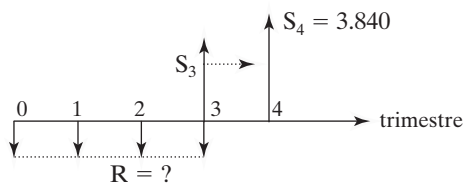
• Cálculo das prestações:

Podemos calcular o valor dos depósitos trimestrais considerando que o montante da aplicação ao final do quarto trimestre (S_4) deve ser igual ao valor à vista do bem:

$$S_4 = [S_3] \times (1 + i)$$

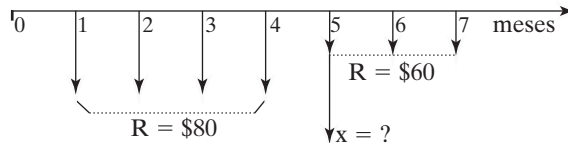
$$\$3.840 = [R \times s_{\overline{4}|3\%}] \times (1,03) = \left[R \times \left(\frac{(1,03)^4 - 1}{0,03} \right) \right] \times (1,03)$$

$$\Rightarrow R = \frac{\$3.840}{4,18363 \times 1,03} = \$891,13$$



► **Exemplo 5.31**

Inicialmente uma pessoa deveria pagar pela compra de um eletrodoméstico quatro prestações mensais de \$80 cada (a primeira para 30 dias), mais três prestações de \$60. Entretanto, a loja oferece outro esquema de pagamento em que o cliente faz um único pagamento daqui a cinco meses. Considerando-se uma taxa de juros de 6% a.m., qual é o valor desse pagamento único?



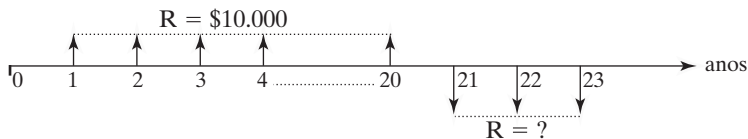
Para serem equivalentes, os dois planos devem ter o mesmo valor ao fim do quinto mês:

Valor do pagamento único = valor do plano inicial ao fim do quinto mês

$$\begin{aligned}
 X &= \left\{ \$80 \times \left[\frac{(1,06)^4 - 1}{0,06} \right] \times 1,06 \right\} + \left\{ 60 + 60 \times \left[\frac{(1,06)^2 - 1}{(1,06)^2 \times 0,06} \right] \right\} \\
 &= \{ \$80 \times s_{\overline{4}|6\%} \times 1,06 \} + \{ \$60 + \$60 \times a_{\overline{2}|6\%} \} \\
 &= \{ \$80 \times 4,37462 \times 1,06 \} + \{ \$60 + \$60 \times 1,83339 \} = \$540,97
 \end{aligned}$$

► **Exemplo 5.32**

Uma pessoa pretende depositar todo final de ano, durante 20 anos, \$10.000 em um fundo que rende juros efetivos de 15% a.a. O montante acumulado deverá ser resgatado a partir do 21º ano por meio de três saques anuais iguais e consecutivos. Calcular o valor dos saques.



No 20º mês, o montante dos depósitos deverá ser igual ao valor descontado dos três saques:

$$\begin{aligned}
 \$10.000 \times s_{\overline{20}|15\%} &= R \times a_{\overline{3}|15\%} \\
 \$10.000 \times \left[\frac{(1,15)^{20} - 1}{0,15} \right] &= R \times \left[\frac{(1,15)^3 - 1}{(1,15)^3 \times 0,15} \right] \\
 \$10.000 \times 102,44358 &= R \times 2,28323 \Rightarrow R = \$448.679,29
 \end{aligned}$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
10000 (CHS) (PMT)	depósito com sinal negativo
20 (n) 15 (i)	número de depósitos e taxa de juros efetiva
(FV) (CHS) (PV)	calcula o montante e define como principal
0 (FV)	apaga o registro do montante
3 (n)	insere o número de saques
(PMT) → 448.678,29	calcula o valor dos saques

► Exemplo 5.33

Em quantos meses uma pessoa acumula um capital de \$12.000 depositando \$560,43 todo final de mês em uma aplicação financeira que rende juros efetivos de 2% a.m.?

Dados: R = \$560,43, S = \$12.000, i = 2% a.m., n = ?

$$S = R \times s_{\overline{n}|2\%}$$

$$12.000 = 560,43 \times s_{\overline{n}|2\%} \Rightarrow s_{\overline{n}|2\%} = \frac{12.000}{560,43} = 21,412130$$

Para calcular a incógnita n, procedemos da seguinte forma:

$$s_{\overline{n}|2\%} = 21,412130$$

$$\left[\frac{(1,02)^n - 1}{0,02} \right] = 21,412130 \Rightarrow (1,02)^n = 1,4282426$$

Aplicando logaritmos:

$$n \times \log 1,02 = \log 1,4282426 \Rightarrow n = 18$$

Nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro, verifica-se que $s_{\overline{18}|2\%} = 21,412130$; conseqüentemente, n = 18.

► Exemplo 5.34

Uma poupança que paga juros efetivos de 1% a.m. foi aberta com um depósito de \$6.500. Efetuando depósitos mensais de \$442,37, o primeiro para 30 dias depois de aberta a poupança, em quantos meses acumula-se um montante de \$80.000?

Dados: R = \$442,37, S = \$80.000, depósito inicial = \$6.500, i = 1% a.m., n = ?

O montante acumulado deve ser igual ao depósito de abertura capitalizado n períodos mais o montante correspondente a n depósitos mensais:

$$S = 6.500 \times (1 + i)^n + R \times s_{\overline{n}|1\%}$$

$$80.000 = 6.500 \times (1,01)^n + 442,37 \times \left[\frac{(1,01)^n - 1}{0,01} \right]$$

$$\Rightarrow (1,01)^n = 2,4486469$$

$$\text{Aplicando logaritmos: } n = \frac{\log(2,4486469)}{\log(1,01)} = 90$$

► Exemplo 5.35

Um fundo de renda fixa paga juros nominais de 60% a.a., capitalizados mensalmente. Um investidor fez um depósito inicial de \$8.000 mais 22 depósitos mensais iguais e consecutivos, o primeiro iniciando um mês após o depósito de abertura. Considerando que no fim do período o fundo acusa um saldo de \$90.000, calcular o valor das aplicações mensais.

Dados: $S = \$90.000$, $j = 60\%$ a.a., $k = 12$, $n = 22$, $R = ?$

- Taxa de juros efetiva mensal: $(1 + i_m) = \left(1 + \frac{0,60}{12}\right) \Rightarrow i_m = 5\%$ a.m.
- Cálculo das aplicações mensais:

$$\$90.000 = \$8.000 \times (1,05)^{22} + R \times s_{\overline{22}|5\%}$$

$$\$90.000 = \$8.000 \times (1,05)^{22} + R \times \left[\frac{(1,05)^{22} - 1}{0,05} \right]$$

$$\$90.000 = \$8.000 \times (1,05)^{22} + R \times 38,50521$$

$$\Rightarrow R = \frac{\$90.000 - \$8.000 \times 2,92526}{38,50521} = \$1.729,58$$

► Exemplo 5.36

Um empréstimo contratado a juros efetivos de 2% a.m. foi liquidado por meio de 13 prestações mensais postecipadas. Considerando que os juros pagos no período totalizaram \$1.060, calcular o valor unitário das prestações.

Dados: $i = 2\%$ a.m., $n = 13$, juros pagos = \$1.060, $R = ?$

valor total pago pelo empréstimo = valor do empréstimo + juros pagos
 $n \times R = P + \$1.060$

$$13 \times R = R \times \left[\frac{(1,02)^{13} - 1}{(1,02)^{13} \times 0,02} \right] + \$1.060$$

$$13 \times R = R \times 11,3483737 + \$1.060 \Rightarrow R = \frac{\$1.060}{13 - 11,3483737} = \$641,79$$

► Exemplo 5.37

Uma pessoa deposita trimestralmente \$120 em uma conta remunerada que paga juros efetivos de 6% a.t. Em quanto tempo acumulará um capital de \$1.187,70?

Dados: $i = 6\%$ a.t., $R = \$120$, $S = \$1.187,70$, $n = ?$

$$S = R \times s_{\overline{n}|6\%}$$

$$\$1.187,70 = \$120 \times \left[\frac{(1,06)^n - 1}{0,06} \right] \Rightarrow (1,06)^n = 1,59385$$

Aplicando logaritmos:

$$n \times \log(1,06) = \log(1,59385) \Rightarrow \frac{\log(1,59385)}{\log(1,06)} = 8 \text{ trimestres}$$

► Exemplo 5.38

Um empréstimo de \$5.000 contratado à taxa efetiva de 5% a.t. será devolvido dentro de um ano, pagando-se trimestralmente apenas os juros. Para que o empréstimo possa ser devolvido, deseja-se acumular um capital efetuando-se depósitos trimestrais iguais em uma aplicação que rende juros efetivos de 4% a.t. Calcular o valor do depósito trimestral que permita acumular o capital e pagar os juros trimestrais do empréstimo.

Cálculo do depósito trimestral que permite acumular o capital:

$$R = \frac{P}{s_{\overline{4}|4\%}} = \frac{\$5.000}{\left[\frac{(1,04)^4 - 1}{0,04} \right]} = \$1.177,45$$

Importe necessário para pagar os juros trimestralmente = $5.000 \times 0,05 = \$250$

Depósito trimestral total = $\$1.177,45 + \$250 = \$1.427,45$

► Exemplo 5.39

Uma pessoa deseja dispor de \$13.000 dentro de seis meses. Para isso, começa hoje a depositar todo início de mês em uma aplicação que paga juros efetivos de 4% a.m. Qual é o valor de cada depósito antecipado para que essa pessoa disponha da quantia ao início do sexto mês?

Dados: $i = 4\%$ a.m., $n = 6$, $S = 13.000$, $R = ?$

Ao início do 6º mês:

$$R = \frac{\$13.000}{s_{\overline{6}|4\%}} = \frac{\$13.000}{\left[\frac{(1,04)^6 - 1}{0,04} \right]} = \frac{\$13.000}{6,6329755} = \$1.959,91$$

▶ **Exemplo 5.40**

A juros efetivos de 2% a.m., quantos depósitos mensais de \$400 são necessários para acumular um capital de \$4.000?

Dados: $S = \$4.000$, $i = 2\%$ a.m., $R = 400$, $n = ?$

$$S = R \times s_{\overline{n}|2\%}$$

$$\$4.000 = \$400 \times \left[\frac{(1,02)^n - 1}{0,02} \right] \Rightarrow (1,02)^n = 1,20$$

Aplicando logaritmos: $n = \frac{\ln 1,20}{\ln 1,02} = 9,206938$

Devem ser efetuados nove depósitos mensais de \$400 e um último, no décimo mês, de valor inferior. Para calcular o depósito final, considera-se que o valor desse depósito (q) mais o montante dos nove depósitos capitalizados até o décimo mês deve ser igual a \$4.000:

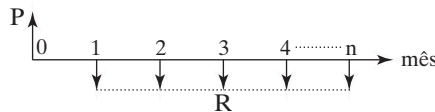
$$\$4.000 = q + \$400 \times \left[\frac{(1,02)^9 - 1}{0,02} \right] \times (1,02) \Rightarrow q = \$20,11$$

Observação: A calculadora HP 12c arredonda para dez o número de depósitos. Portanto, é necessário aplicar logaritmos.

5.3 Cálculo da taxa de juros em séries periódicas uniformes

A taxa de juros de um fluxo uniforme de pagamentos ou recebimentos é a taxa que capitaliza os termos da série. O cálculo dessa taxa requer resolver para i^* a seguinte equação:

$$P - \frac{R}{(1+i^*)^1} - \frac{R}{(1+i^*)^2} - \frac{R}{(1+i^*)^3} - \dots - \frac{R}{(1+i^*)^n} = 0$$



No diagrama, P representa o valor inicial do fluxo de caixa e R , o valor unitário dos termos da série uniforme. O cálculo manual da taxa de juros em fluxos multiperiódicos é um processo demorado e cansativo, entretanto as calculadoras financeiras realizam esse cálculo de forma fácil e rápida. Na falta delas, pode-se obter um resultado aproximado por meio de tentativas ou por interpolação linear. As tentativas são, em geral, penosas, e as interpolações, imprecisas.

Vários métodos iterativos podem ser usados para calcular a taxa exata, tais como o método de aproximações de Newton-Raphson, o método de Baily-Lenzi, o método Gauss-Cantelli e o método de Karpin, entre outros.

O método de Newton-Raphson permite uma convergência rápida, mas o processo é demorado e relativamente complexo.

O método de Baily-Lenzi é simples de ser usado e oferece resultados surpreendentemente exatos. Dependendo do número de termos da série uniforme postecipada, calcula-se a taxa de juros usando as seguintes equações:

$$\begin{array}{ll} \text{para } n \times i \leq 3 & \text{para } 3 < n \times i < 5,5 \\ i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] & i = \frac{12h - 6K - (n-1)h^2}{6 - (n-1)h} \end{array}$$

$$\text{onde: } h = \left(\frac{nR}{P} \right)^{2/(n+1)} - 1 \quad \text{e} \quad K = \left[\frac{nh}{1 - (1+h)^{-n}} \right]^{2/(n+1)} - 1;$$

P = principal (financiamento efetivo);

R = valor da prestação postecipada;

n = número de prestações.

A equação da esquerda é recomendada para baixos valores de i e n , gerando resultados mais precisos para $n \times i \leq 3$, e corresponde à maioria dos casos práticos. A equação da direita é indicada para valores altos de $n \times i$ ($3 < n \times i < 5,5$). A utilização da equação adequada, conforme as faixas de variação de $n \times i$, resulta em erros inferiores a 1%.

A seguir, ilustramos o uso das equações por meio do seguinte exemplo:

Dados: P = \$92.712,37, R = \$14.000, n = 25, i (resposta correta) = 0,146 = 14,6% a.m.

$$h = \left(\frac{nR}{P} \right)^{2/(n+1)} - 1 = 0,10759; \quad K = \left[\frac{nh}{1 - (1+h)^{-n}} \right]^{2/(n+1)} - 1 = 0,08582$$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] = 0,14823 \text{ ao mês (erro de 1,5\%)}$$

$$i = \frac{12h - 6K - (n-1)h^2}{6 - (n-1)h} = 0,14581 \text{ ao mês (erro de 0,1\%)}$$

A segunda fórmula conduziu a um resultado melhor (menor erro), pois o problema se enquadra na regra: $3 < n \times i < 5,5$.

No método de Baily-Lenzi, a taxa de juros pode também ser calculada em função do montante (S) da série uniforme postecipada:

$$i = h \left[\frac{12 + (n+1)h}{12 + 2(n+1)h} \right] \quad \text{onde: } h = \left(\frac{S}{nR} \right)^{2/(n-1)} - 1$$

5.3.1 Taxa aproximada: interpolação linear

Muitas vezes não é possível calcular a taxa de juros exata implícita em uma série de pagamentos/recebimentos, pois, com frequência, o cálculo requer a resolução de um polinômio de n -ésimo grau. Contudo, a taxa pode ser aproximada usando-se um processo de interpolação linear que fornece um valor aproximado. A mecânica do processo de interpolação linear é mostrada em vários dos exemplos de aplicação a seguir.

Exemplos de aplicação

Exemplo 5.41

Um financiamento será pago em 18 prestações mensais de \$100.000. Considerando o valor do financiamento de \$875.563, calcular a taxa de juros efetiva cobrada.

Dados: $n = 18$, $R = \$100.000$, $P = \$875.563$, $i = ?$

- Com o fator de valor presente de séries uniformes em destaque:

$$P = R \times a_{\overline{n}|i\%}$$

$$\$875.563 = \$100.000 \times a_{\overline{18}|i\%} \Rightarrow a_{\overline{18}|i\%} = \frac{\$875.563}{\$100.000} = 8,75563$$

Nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro, observa-se que $a_{\overline{18}|9\%} = 8,75563$ e, conseqüentemente, $i = 9\%$. As tabelas financeiras são um valioso auxílio didático, mas a sua utilidade prática é limitada. Uma solução aproximada pode ser encontrada realizando-se uma interpolação linear, entretanto o cálculo manual é quase sempre um trabalho demorado (veja o Exemplo 5.43 para uma ilustração desse processo), que pode ser evitado usando-se calculadoras financeiras.

Exemplo 5.42

Um equipamento é vendido a prazo por meio de uma entrada de 20% mais nove prestações mensais de \$17.337,75. Considerando o valor à vista de \$120.000, calcular a taxa de juros efetiva cobrada.

Dados: $P = \$120.000$, entrada = \$24.000, $R = \$17.337,75$, $n = 9$, $i = ?$

Levando em conta que as prestações devem ser calculadas a partir do financiamento efetivo, podemos destacar o fator de valor presente de séries uniformes da seguinte forma:

$$R = \frac{\text{Financiamento efetivo}}{a_{\overline{n}|i\%}} = \frac{P - \text{entrada}}{a_{\overline{9}|i\%}}$$

$$\$17.337,75 = \left(\frac{\$120.000 - \$24.000}{a_{\overline{9}|i\%}} \right) \Rightarrow a_{\overline{9}|i\%} = 5,53705$$

Verifica-se nas tabelas financeiras do Apêndice que, para $i = 11\%$, o valor do fator financeiro é $a_{\overline{9}|11\%} = 5,53705$.

Alternativamente, podemos usar a fórmula de Baily-Lenzi para calcular o valor de i :

Como $n = 9$:

$$i = h \left[\frac{12 - (n - 1)h}{12 - 2(n - 1)h} \right] = 0,1020284 \times \left(\frac{12 - 8 \times 0,1020284}{12 - 2 \times 8 \times 0,1020284} \right) = 0,11 = 11\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 5.43

Calcular a taxa de juros mensal efetiva à qual foi tomado um financiamento de \$300.000 que será liquidado em 18 prestações mensais de \$37.758,88.

Dados: $P = \$300.000$, $n = 18$, $R = \$37.758,88$, $i = ?$

- Fator de valor presente de séries uniformes:

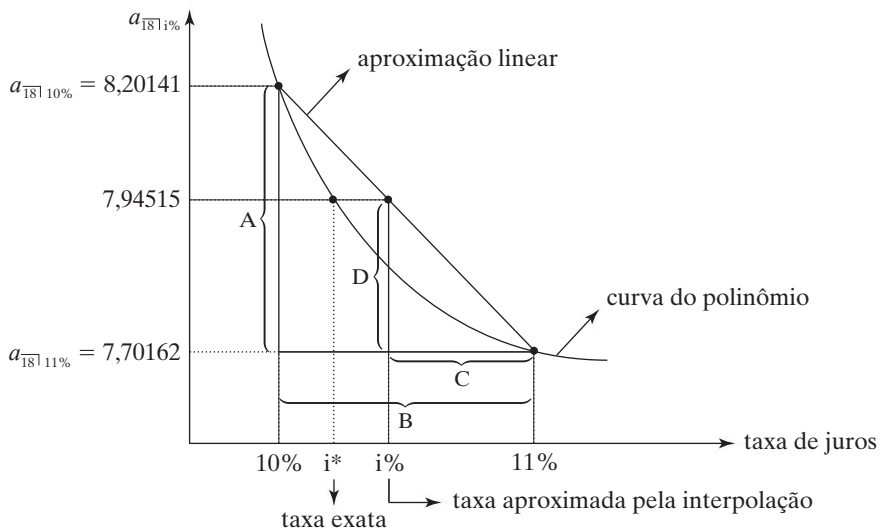
$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i\%}}$$

$$\$37.758,88 = \frac{\$300.000}{a_{\overline{18}|i\%}} \Rightarrow a_{\overline{18}|i\%} = 7,94515$$

A seguir, o fator $a_{\overline{18}|i\%} = 7,94515$ será aproximado por meio de uma interpolação linear, a fim de se estimar a incógnita i .

- Interpolação linear:

Embora o fator $a_{\overline{18}|i\%}$ seja uma função exponencial, podemos admitir que, em intervalos pequenos, o comportamento dessa função é linear. Isso nos conduz a um erro desprezível, pois estamos trabalhando com cinco casas decimais em um intervalo pequeno. Podemos começar calculando o fator $a_{\overline{18}|i\%}$ para diversos valores de taxas de juros e, a seguir, efetuar a interpolação linear:



$i\%$	$a_{\overline{18} i\%} = \frac{(1+i)^{18} - 1}{(1+i)^{18} \times i}$
9%	8,75563
10%	8,20141
11%	7,70162

A taxa exata deve satisfazer o polinômio $a_{\overline{18}|i\%} = 7,94515$ representado pela curva, enquanto a taxa aproximada é o valor fornecido pela interpolação. Observando a figura, podemos estabelecer a seguinte relação de proporcionalidade de triângulos:

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$$

$$\frac{8,20141 - 7,70162}{11 - 10} = \frac{7,94515 - 7,70162}{11 - i}$$

$$\text{logo: } i = 11\% - \left[\frac{7,94515 - 7,70162}{8,20141 - 7,70162} \right] \times (11\% - 10\%) = 10,51\% \text{ a.m.}$$

Observe que a interpolação foi realizada entre as taxas de 10% e 11%, pois o fator procurado ($a_{\overline{18}|i\%} = 7,94515$) pode ser obtido para alguma taxa de juros aproximada entre 10% e 11%.

- Cálculo de i pelo método de Baily-Lenzi:

Como $n \times i < 3$:

$$h = \left(\frac{nR}{P} \right)^{2/(n+1)} - 1 = \left(\frac{18 \times 37.758,88}{300.000} \right)^{2/19} - 1 = 0,0898992$$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right]$$

$$i = 0,0898992 \times \left(\frac{12 - 17 \times 0,0898992}{12 - 2 \times 17 \times 0,0898992} \right) = 0,1053 = 10,53\% \text{ a.m.}$$

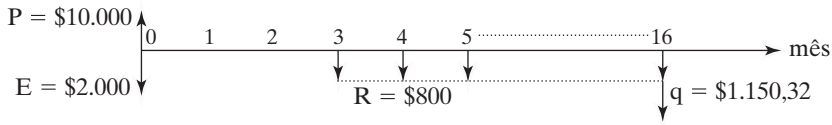
Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN) 37758,88 (CHS) (PMT)	
18 (n) 300000 (PV)	
(i) → 10,50	

Podemos observar que a taxa estimada pela fórmula de Baily-Lenzi (10,53% a.m.) aproxima-se bastante (com erro inferior a 0,29%) do resultado exato calculado usando a HP 12c (10,50%).

► Exemplo 5.44

Um bem cujo valor à vista é de \$10.000 será pago por meio de uma entrada de 20%, mais 13 prestações de \$800 cada e um pagamento final de \$1.150,32 pago juntamente com a última prestação. Considerando que a primeira prestação antecipada será paga somente ao término de um período de carência de três meses, determinar o custo do financiamento.

Dados: $P = \$10.000$, entrada (E) = \$2.000, $R = \$800$, $q = \$1.150,32$, $c = 3$, $n = 13$, $i = ?$



Por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo de pagamentos que liquidam o financiamento:

valor à vista = entrada + VP das 13 prestações + VP do pagamento final

$$\$10.000 = \$2.000 + \frac{\$800 \times a_{\overline{13}|i\%}}{(1+i)^2} + \frac{\$1.150,32}{(1+i)^{16}} \quad \text{onde: VP = valor presente}$$

A partir da equação anterior, podemos operar algebricamente para destacar o fator financeiro que será interpolado de modo a destacar a incógnita i:

$$\begin{aligned}
 \$8.000 &= \$800 \times \frac{\left[\frac{(1+i)^{13} - 1}{(1+i)^{13} \times i} \right]}{(1+i)^2} + \frac{\$1.150,32}{(1+i)^{16}} \\
 \$10 &= \left[\frac{(1+i)^{13} - 1}{(1+i)^{15} \times i} \right] + 1,4379 \times \frac{1}{(1+i)^{16}}
 \end{aligned}$$

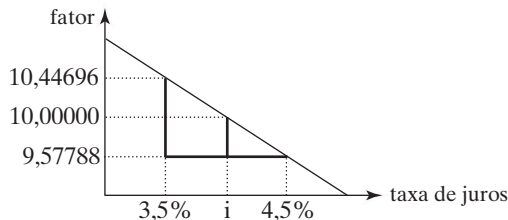
Destacando o fator financeiro a ser interpolado:

$$\text{fator} = \left[\frac{(1+i)^{14} + 0,4379i - 1}{(1+i)^{16} \times i} \right] = 10,00000$$

• Interpolação linear:

por proporcionalidade de triângulos: $\frac{10 - 9,57788}{4,5 - i} = \frac{10,44696 - 9,57788}{4,5 - 3,5}$

$$i = 4,5\% - \left[\frac{10 - 9,57788}{10,44696 - 9,57788} \right] \times (4,5\% - 3,5\%) = 4,01\% \text{ a.m.}$$



► **Exemplo 5.45**

Depositando mensalmente \$4.000 durante 18 meses, acumula-se um capital de \$124.136,67. Calcular a taxa de juros efetiva ao mês obtida pelos depósitos.

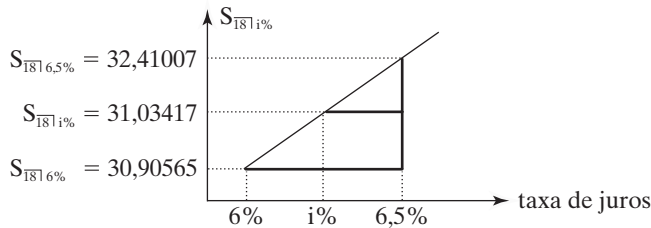
Dados: n = 18, R = \$4.000, S = \$124.136,67, i = ?

- Fator financeiro implícito:

$$S = R \times s_{\overline{18}|i\%}$$

$$124.136,67 = 4.000 \times s_{\overline{18}|i\%} \Rightarrow s_{\overline{18}|i\%} = \frac{124.136,67}{4.000} = 31,03417$$

- Interpolação linear:



Observando o digrama anterior, pode-se estabelecer a seguinte proporcionalidade de triângulos:

$$\frac{32,41007 - 30,90565}{6,5 - 6,0} = \frac{31,03417 - 30,90565}{i - 6,0}$$

$$i = 6,0\% + \left[\frac{31,03417 - 30,90565}{32,41007 - 30,90565} \right] \times (6,5\% - 6,0\%) = 6,043\% \text{ a.m.}$$

O cálculo pode ser feito também pela fórmula de Baily-Lenzi em função do montante:

$$h = \left(\frac{S}{nR} \right)^{2/(n-1)} - 1 = \left(\frac{\$124.136,67}{18 \times \$4.000} \right)^{2/(18-1)} - 1 = 0,066182333$$

$$i = h \left[\frac{12 + (n+1)h}{12 + 2(n+1)h} \right] = 0,066182333 \times \left[\frac{12 + 19 \times 0,066182333}{12 + 2 \times 19 \times 0,066182333} \right] = 6,045\%$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN) 4000 (CHS) (PMT)	apaga a memória financeira e insere o valor das aplicações mensais
18 (n) 124136,67 (FV)	número de aplicações mensais e valor do montante
(i) → 6,04380	calcula a taxa de juros efetiva

► **Exemplo 5.46**

Uma pessoa aplicou mensalmente \$501,55 durante 18 meses em um fundo de renda fixa. Considerando que o total dos juros obtidos até a data da última aplicação foi de \$1.060, calcular a taxa de juros mensal efetiva obtida.

Dados: n = 18, R = \$501,55, juros obtidos = \$1.060, i = ?

juros ganhos = montante acumulado – aplicação total

$$\begin{aligned} \$1.060 &= \$501,55 \times s_{\overline{18}|i\%} - \$501,55 \times 18 \\ \Rightarrow s_{\overline{18}|i\%} &= 20,113448 \Rightarrow i = 1,2884\% \end{aligned}$$

A taxa de juros pode ser determinada também interpolando o fator financeiro $s_{\overline{18}|i\%} = 20,113448$, seguindo o procedimento mostrado no Exemplo 5.45.

► Exemplo 5.47

Nas vendas a prazo, uma loja aumenta em 20% o preço à vista. Esse valor majorado é dividido em três partes iguais, sendo a primeira paga no ato da compra. Calcular a taxa de juros cobrada usando os seguintes métodos: a) interpolação linear; b) resolução matemática; c) método de Baily-Lenzi.

Dados: valor à vista = P, R = 0,4P, n = 3 prestações (a 1ª paga no ato), i = ?

a) Processo de interpolação linear:

- Valor da prestação:

$$R = \frac{1,2 \times P}{3} = 0,4P$$

- Fator financeiro a ser interpolado:

O fator pode ser destacado considerando-se que o valor à vista deve ser igual ao valor presente das prestações:

$$P = R + R \times a_{\overline{2}|i\%} = 0,4P + 0,4P \times a_{\overline{2}|i\%} \Rightarrow a_{\overline{2}|i\%} = 1,50000$$

- Interpolação linear:

Taxa de juros aproximada:

$$i = 22\% - \left[\frac{1,50000 - 1,49154}{1,50946 - 1,49154} \right] \times (22\% - 21\%) = 21,53\% \text{ a.m.}$$

i%	$a_{\overline{2} i\%} = \frac{(1+i)^2 - 1}{(1+i)^2 \times i}$
20%	1,52778
21%	1,50946
22%	1,49154

A interpolação foi efetuada entre as taxas de 21% e 22%, pois o fator procurado ($a_{\overline{2}|i\%} = 1,50000$) pode ser obtido para alguma taxa de juros entre 21% e 22% (aproximadamente 21,5%).

b) Resolução matemática:

A taxa exata pode ser calculada resolvendo-se a equação de segundo grau resultante do fato de que, por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente das prestações:

$$P = 0,4P + \frac{0,4P}{1+i} + \frac{0,4P}{(1+i)^2} \Rightarrow (1+i)^2 - 0,6667(1+i) - 0,6667 = 0$$

Para resolver a equação, usamos a forma quadrática $aX^2 + bX + c = 0$, onde $X = (1+i)$; $a = 1$; $b = -0,6667$; $c = -0,6667$.

$$\text{A solução tem a seguinte forma: } X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo os valores das variáveis:

$$(1+i) = \frac{-(-0,6667) \pm \sqrt{(-0,6667)^2 - 4 \times (1) \times (-0,6667)}}{2 \times 1}$$

$$(1+i) = \frac{0,6667 \pm 1,763830}{2} \Rightarrow i = 21,53\% \text{ a.m.}$$

c) Método de Baily-Lenzi:

Podemos também usar a fórmula de Baily-Lenzi para calcular o valor de i . Para tanto, primeiro é preciso identificar os valores dos diversos parâmetros da fórmula:

$$P = 0,4P + \frac{0,4P}{1+i} + \frac{0,4P}{(1+i)^2}$$

$$P(1 - 0,4) = P \left(\frac{0,4}{1+i} + \frac{0,4}{(1+i)^2} \right)$$

$$0,6 = \left(\frac{0,4}{1+i} + \frac{0,4}{(1+i)^2} \right)$$

Logo, podemos identificar as variáveis: financiamento efetivo = 0,6; prestação (R) = 0,4; $n = 2$; $i = ?$

Substituindo os valores na fórmula de Baily-Lenzi, considerando que $n \times i < 3$:

$$h = \left(\frac{nR}{\text{Financiamento efetivo}} \right)^{2/(n+1)} - 1 = \left(\frac{2 \times 0,4}{0,6} \right)^{2/3} - 1 = 0,21141$$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] = 0,21141 \times \left(\frac{12 - 0,21141}{12 - 2 \times 0,21141} \right) = 21,53\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN) 0,4 (CHS) (g) (BEG) (PMT)	
3 (n) 1 (PV)	
(i) → 21,52504	

apaga a memória e entra com o valor da prestação antecipada
entra com o número de prestações e principal unitário
calcula a taxa de juros

Exemplo 5.48

A empresa TV Cabo Telecomunicações S.A. enviou a seus assinantes uma proposta com três opções de pagamento: mensal, semestral e anual. Na primeira opção, o assinante paga mensalmente parcelas fixas de \$49, sendo a primeira no ato da instalação. Na segunda, faz dois pagamentos semestrais de \$275, sendo o primeiro no ato da instalação. Na terceira opção, faz um único pagamento de \$539 à vista. A empresa alega que, além de evitar idas e vindas ao banco, o assinante que opta pelos planos semestral ou anual é beneficiado por um desconto promocional no valor da mensalidade. Determinar a taxa de juros embutida em cada alternativa de pagamento, semestral e anual.

a) Opção de pagamento mensal:

Por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente dos pagamentos mensais:

$$\$539 = \$49 + \$49 \times a_{\overline{12}|i\%} \Rightarrow a_{\overline{12}|i\%} = 10,00000 \Rightarrow i = 1,6231\% \text{ a.m.}$$

A primeira prestação mensal é paga no ato (antecipada).

Alternativamente, o cálculo da taxa de juros pode ser feito usando-se a fórmula de Baily-Lenzi:

como $n \times i < 3$:

$$h = \left(\frac{nR}{\text{Financiamento efetivo}} \right)^{2/(n+1)} - 1 = \left(\frac{12 \times \$49}{\$539 - \$49} \right)^{2/(12+1)} - 1 = 0,0160119$$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] = 0,0160119 \times \left(\frac{12 - 10 \times 0,0160119}{12 - 2 \times 10 \times 0,0160119} \right) = 1,6231\% \text{ a.m.}$$

Ou seja, a taxa de juros embutida na opção de 12 pagamentos mensais é de 1,6231% a.m.

b) Opção de pagamento semestral:

Pelo princípio de equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente dos pagamentos semestrais:

$$\$539 = \$275 + \frac{\$275}{(1+i)} \Rightarrow i = 4,1667\% \text{ a.s.}$$

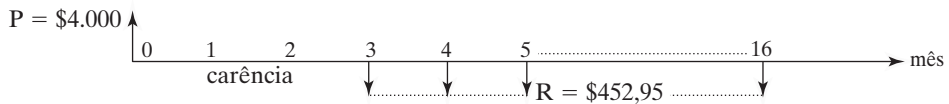
$$i_m = (1,041667)^{1/6} - 1 = 0,6827\% \text{ a.m.}$$

A opção com dois pagamentos embute juros efetivos mensais menores que a opção com 12 pagamentos (0,6827% a.m. < 1,6231% a.m.). Logo, a escolha da opção de pagamento dependerá basicamente da taxa de juros vigente para aplicações financeiras. Se essa taxa for superior a 0,6827% a.m., então valerá mais a pena manter o dinheiro aplicado obtendo-a e pagar o contrato em duas vezes. Se for inferior, a decisão mais adequada será pagar à vista.

► **Exemplo 5.49**

Um empréstimo de \$4.000 será quitado em 14 parcelas antecipadas mensais de \$452,95 cada. Considerando que há um período de carência de três meses, calcular a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.

Dados: P = \$4.000, n = 14, c = 3, R = \$452,95, i = ?



- Fator financeiro para o processo de interpolação:

O fator financeiro pode ser destacado se consideramos que as prestações são calculadas com base no financiamento capitalizado por $c - 1$ meses, onde c representa o término do período de carência:

$$R = \frac{P(1 + i)^{c-1}}{a_{\overline{n}|i\%}}$$

$$\$452,95 = \frac{\$4.000 \times (1 + i)^{3-1}}{\left[\frac{(1 + i)^{14} - 1}{(1 + i)^{14} \times i} \right]} \Rightarrow \left[\frac{(1 + i)^{14} - 1}{(1 + i)^{16} \times i} \right] = 8,83100$$

- Interpolação linear:

Taxa de juros aproximada:

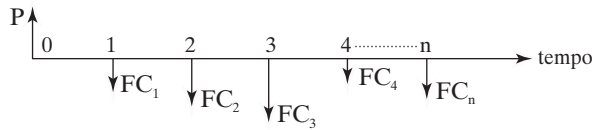
$$i = 5,5\% - \left[\frac{8,83100 - 8,61584}{8,97836 - 8,61584} \right] \times (5,5\% - 5,0\%) = 5,2033\% \text{ a.m.}$$

$i\%$	$\frac{(1 + i)^{14} - 1}{(1 + i)^{16} \times i}$
5,0%	8,97836
5,5%	8,61584

5.4 Taxa interna de retorno de séries mistas

O cálculo da taxa interna de retorno (TIR) de séries mistas requer resolver para i^* a seguinte equação:

$$\text{VPL} = P - \sum_{t=1}^n \frac{\text{FC}_t}{(1 + i^*)^t} = 0$$



Por definição, a TIR é a taxa de juros que anula o VPL (valor presente líquido) do fluxo de caixa. FC_t representa o fluxo de caixa no t -ésimo período, P é o fluxo inicial, e Σ , símbolo de somatório, indica que deve ser realizada a soma, da data 1 até a data n , dos fluxos de caixa descontados ao período inicial (data $t = 0$).

Não temos condições de desenvolver uma fórmula analítica única para o cálculo da TIR em fluxos mistos ou não uniformes, portanto o cálculo manual é usado para obter uma aproximação por meio de um processo relativamente demorado. As máquinas financeiras permitem o cálculo da TIR de fluxos mistos de forma fácil e rápida.

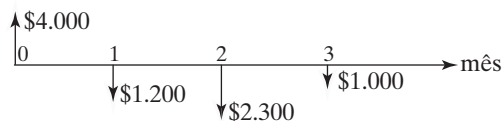
Exemplos de aplicação

Exemplo 5.50

Um financiamento de \$4.000 será pago em três parcelas postecipadas mensais consecutivas de \$1.200, \$2.300 e \$1.000, respectivamente. Calcular o custo efetivo do financiamento.

Esse custo é a TIR do fluxo de caixa, ou seja, o valor de i^* que anula o VPL.

$$\text{VPL}(i^*) = \$4.000 - \frac{\$1.200}{(1 + i^*)^1} - \frac{\$2.300}{(1 + i^*)^2} - \frac{\$1.000}{(1 + i^*)^3} = 0$$



O cálculo manual da TIR requer calcular VPLs para diversas taxas de juros até provocar a mudança no sinal do VPL que permita realizar uma interpolação linear.

- Taxa aproximada:

i^*	VPL
5%	-\$92,86
6%	-\$18,69
7%	+\$53,30

$$TIR = 6\% + \left(\frac{-18,69}{-18,69 - (+53,30)} \right) \times (7\% - 6\%) = 6,2596\%$$

A interpolação foi realizada entre as taxas de 6% e 7%, pois entre essas duas taxas o VPL muda de sinal.

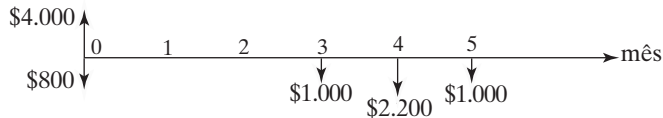
Calculadora HP 12c:	
(f) (REG)	apaga todos os registros
4.000 (g) (CF ₀)	fluxo no mês 0
1.200 (CHS) (g) (CF ₁)	fluxo no mês 1
2.300 (CHS) (g) (CF ₂)	fluxo no mês 2
1.000 (CHS) (g) (CF ₃)	fluxo no mês 3
(f) (IRR) → 6,2567%	cálculo da taxa interna de retorno do fluxo

► **Exemplo 5.51**

Uma compra cujo valor à vista é de \$4.000 pode ser paga com uma entrada de 20% mais três parcelas mensais antecipadas de \$1.000, \$2.200 e \$1.000, respectivamente. Considerando que existe um período de carência de três meses para o início do pagamento das parcelas, calcular o custo efetivo do financiamento. O custo do capital é de 4% a.m.

O custo efetivo do financiamento é a taxa TIR que satisfaz a seguinte equação:

$$VPL = \$4.000 - \$800 - \frac{\$1.000}{(1 + TIR)^3} - \frac{\$2.200}{(1 + TIR)^4} - \frac{\$1.000}{(1 + TIR)^5} = 0$$



- Interpolação linear:

TIR	VPL
7,0%	-\$7,65
7,5%	+\$51,12

$$TIR = 7\% + \left[\frac{-7,65}{-7,65 - (+51,12)} \right] \times (7,5\% - 7\%) = 7,065\%$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (REG)	apaga todos os registros
3.200 (g) (CF ₀)	fluxo no mês 0
0 (CHS) (g) (CF ₁)	fluxo no mês 1
2 (g) (N _j)	o fluxo do mês 1 repete-se duas vezes
1.000 (CHS) (g) (CF ₃)	fluxo no mês 3
2.200 (CHS) (g) (CF ₄)	fluxo no mês 4
1.000 (CHS) (g) (CF ₅)	fluxo no mês 5
(f) (IRR) → 7,064%	calcula a TIR

O custo financeiro da alternativa pagamento a prazo é de 7,064% a.m., ou seja, é maior que a rentabilidade alternativa do capital que, nesse caso, é de 4% a.m. (custo do capital). Consequentemente, a melhor opção é comprar à vista.

Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias e fluxos postecipados (termos vencidos).

- Um financiamento de \$132.000 será liquidado em 14 prestações mensais. Considerando uma taxa de juros efetiva de 3% a.m., calcular o valor das prestações na hipótese de serem pagas: a) postecipadamente (fim de cada mês); b) antecipadamente (início de cada mês).
- Uma pessoa deposita \$2.450 todo fim de mês em um fundo de investimento que paga juros nominais de 120% a.a. capitalizados mensalmente. Calcular o montante da aplicação no fim do 16º mês.
- Uma compra no valor de \$16.000 será paga com uma entrada de 20% e determinado número de prestações mensais de \$4.038,02, sendo a primeira um mês após a compra. A juros efetivos de 10% a.m., calcular o número de prestações necessárias para liquidar a dívida.
- Uma máquina é vendida em 12 prestações mensais de \$307. A juros efetivos de 10% a.m., qual deveria ser seu valor à vista?
- Calcular o valor da aplicação mensal necessária que permita acumular ao fim de 16 meses um montante de \$2.300.000, considerando um rendimento efetivo de 6% a.m.
- Por uma compra no valor de \$5.000 será paga uma entrada de 20% e prestações quinzenais durante dois anos. A juros efetivos de 26,9735% a.a., calcular o valor das prestações.
- Um investidor aplicou mensalmente \$4.900 durante 14 meses. Considerando que no fim do 14º mês o saldo da aplicação foi de \$110.497,40, calcular a taxa de juros efetiva ganha.
- Um bem de \$350 pode ser pago dando-se uma entrada mais quatro prestações bimestrais de \$100. A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor da entrada.
- Considerando uma remuneração efetiva de 6% a.m., calcular a aplicação necessária a ser feita hoje que permita sacar mensalmente \$3.280 durante os próximos 19 meses. O primeiro saque ocorrerá daqui a 30 dias.
- Uma pessoa financiou uma compra no valor de \$43.000 em 12 prestações mensais de \$7.932,64. Calcular a taxa de juros efetiva mensal cobrada pelo financiamento.
- A juros efetivos de 8% a.m., em que prazo pode ser liquidado um financiamento de \$2.300 pagando-se prestações mensais de \$278,98?
- Determinar a taxa de juros efetiva mensal cobrada por um empréstimo de \$132.000 que será reembolsado por meio de 13 prestações mensais de \$15.793,91.
- Um eletrodoméstico de \$330 será pago dando-se uma entrada de 15% mais oito prestações mensais. A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor das prestações na hipótese de serem: a) postecipadas; b) antecipadas.
- Pretende-se acumular um capital de \$400.000 depositando-se semanalmente \$9.651,05 em uma aplicação que rende juros efetivos de 36,05% a.m. Quantos depósitos serão necessários?
- Por uma compra no valor de \$375 pagam-se 12 prestações mensais antecipadas (a primeira no ato da compra). A juros efetivos de 8% a.m., calcular o valor das prestações.

16. Um empréstimo de \$1.000.000 será pago com 11 prestações anuais de \$150.000 cada. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada, considerando que as prestações serão: a) postecipadas; b) antecipadas.
17. Um bem é vendido à vista por \$15.000 ou a prazo em prestações mensais de \$885,71. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o número de prestações necessárias.
18. Na compra de um espectrômetro cujo valor à vista é de \$50.000, um laboratório farmacêutico deverá pagar uma entrada mais seis prestações mensais de \$8.391,83. A juros efetivos de 7% a.m., calcular o valor da entrada.
19. Uma pessoa, ao comprar um carro cujo preço à vista é de \$14.000, teve o seu usado avaliado em \$6.000 e aceito como entrada. O saldo será pago em 20 parcelas mensais iguais, a juros efetivos de 6% a.m. Calcular o valor da prestação mensal considerando que a primeira parcela será paga: a) um mês após a compra; b) na data da compra.
20. Por um equipamento cujo valor à vista é de \$40.000 paga-se uma entrada de 20% mais 18 prestações mensais antecipadas com carência de três meses até o início da primeira. A juros efetivos de 3% a.m., determinar o valor das prestações.
21. Uma pessoa deposita mensalmente \$120 durante 13 meses em uma aplicação que rende juros efetivos de 4% a.m. Considerando que ela pretenda resgatar o capital por meio de três saques mensais iguais e consecutivos (o primeiro um mês depois do último depósito), calcular o valor de cada saque.
22. Por política de crédito, nas vendas a prazo uma loja aumenta em 25% o valor à vista. Desse valor aumentado, 20% é pago como entrada e o saldo restante é dividido em seis parcelas mensais iguais. Determinar a taxa de juros efetiva mensal cobrada no financiamento.
23. Um financiamento será pago em oito prestações mensais de \$66.000 mais 14 prestações de \$13.500 nos meses subsequentes. Considerando que as taxas de juros efetivas sejam de 10% a.m. para o primeiro ano e de 15% a.m. para o segundo ano, respectivamente, e que o vendedor proponha a possibilidade de o débito ser liquidado por meio de um pagamento único no quinto mês, qual é o valor desse pagamento?
24. Um eletrodoméstico será pago com uma entrada mais 12 prestações mensais iguais e consecutivas. Se cada prestação é igual a 10% do valor à vista, sendo a primeira paga logo ao término de um período de carência de quatro meses e considerando-se uma taxa de juros efetiva composta de 4% a.m., calcular o percentual sobre o valor à vista que deve ser pago como entrada.
25. Uma instituição financeira concede um período de carência para início dos reembolsos em operações de empréstimo. Um financiamento de \$380.000 será pago em sete prestações mensais antecipadas de \$159.748,88 cada. A juros efetivos de 15% a.m., determinar o período de carência concedido.
26. O seguro de um automóvel pode ser pago à vista por \$800 ou em oito prestações mensais de \$128,83. Considerando que está sendo cobrada uma taxa de juros nominal anualizada, calculá-la nas seguintes hipóteses sobre a capitalização dos juros: a) mensal; b) semestral; c) trimestral; d) bimestral; e) anual.
27. Uma pessoa deposita mensalmente \$280 em um fundo de investimento que paga juros efetivos de 5% a.m. No futuro, pretende resgatar o investimento por meio de cinco saques semestrais de \$14.253,54, sendo o primeiro iniciado cinco meses após o último depósito. Quantos depósitos serão necessários?
28. Um equipamento cujo valor à vista é de \$33.000 pode ser pago com uma entrada mais 18 prestações mensais antecipadas de \$2.489,91 cada. Considerando um período de carência de três meses para o início do pagamento das prestações, calcular o valor da entrada a juros efetivos de 5% a.m.

29. Um equipamento de \$6.000 será pago com uma entrada de 50% e tantas prestações mensais de \$880 quantas forem necessárias, mais um pagamento residual inferior ao valor da prestação, que deve ser efetuado um mês após a data do vencimento da última parcela. Considerando que a primeira prestação vence três meses após a data da compra e que a taxa de juros efetiva cobrada é de 7% a.m., determinar o número de prestações necessárias e o valor do pagamento residual.
30. Para liquidar um financiamento dispõe-se de duas formas de pagamento financeiramente equivalentes: na primeira são pagas 13 prestações mensais de \$834 e na segunda, 16 prestações de \$708 mais determinada quantia paga no fim do 17^a mês. A juros efetivos de 7% a.m., calcular o valor da referida quantia.
31. Uma pessoa tomou um empréstimo de \$200.000 contratado a juros efetivos de 2% a.m. para ser liquidado em dez prestações mensais. Depois de serem pagas cinco prestações, ela resolve tomar \$80.000 adicionais, incorporando essa nova dívida ao saldo da primitiva em um só negócio. Considerando a mesma taxa de juros, calcular o valor da nova dívida e sua prestação para liquidação nos cinco meses restantes.
32. Um carro é vendido por \$10.000 à vista ou com uma entrada de 10% mais um determinado número de prestações mensais de \$500. Devem-se pagar, além das prestações mensais, três parcelas semestrais de \$632,82. A juros efetivos de 2% a.m., determinar o número de prestações mensais necessárias.
33. Um mutuário deverá reembolsar um empréstimo pagando 25 prestações mensais de \$20.000 cada. Querendo abreviar em um ano o prazo de quitação, ele propõe efetuar um pagamento extraordinário juntamente com a sexta prestação. A juros efetivos de 1% a.m., determinar o valor desse pagamento.
34. Uma pessoa compra um apartamento de \$150.000 nas seguintes condições: entrada de \$50.000 mais determinado número de prestações mensais antecipadas de \$1.338,99 cada, com um ano de carência para o início dos pagamentos. Considerando uma taxa de juros efetiva contratada de 1% a.m., calcular o número de prestações.
35. Um bem será pago em quatro prestações trimestrais de \$135.000. Para suavizar os pagamentos, o comprador pediu a modificação do prazo para 15 prestações mensais. Considerando uma taxa de juros efetiva cobrada de 7% a.m., calcular o valor das prestações mensais.
36. Uma máquina é vendida em 18 prestações mensais postecipadas. As prestações de ordem ímpar são de \$2.000 e as de ordem par, de \$2.800. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o valor do financiamento.
37. Por um financiamento pagam-se cinco prestações mensais de \$1.500, começando ao término de um período de carência de cinco meses. Um mês após o pagamento da última prestação, inicia-se o pagamento de mais quatro parcelas mensais de \$1.000. A juros efetivos de 7% a.m., calcular o valor do financiamento.
38. Um funcionário, prevendo sua aposentadoria, resolve efetuar nos próximos dois anos depósitos mensais iguais em um fundo de pecúlio. O primeiro depósito é efetuado ao término do primeiro mês, e a totalidade do capital acumulado é resgatada por meio de dez retiradas semestrais de \$80.000, ocorrendo a primeira dois anos após o último depósito. Considerando um rendimento efetivo do fundo de 4% a.m., determinar o valor dos depósitos mensais.
39. Um empresário comprou um prédio de apartamentos, pagando \$825.000 de entrada e prometendo pagar \$180.000 de três em três meses, durante cinco anos. Considerando uma taxa de juros efetiva aplicada de 4,5% ao trimestre, pede-se: a) calcular o valor à vista do prédio; b) determinar de quanto deverá ser o pagamento a ser feito no vencimento da 13^a prestação para ficar em dia, caso deixe de efetuar os 12 primeiros pagamentos; c) determinar quanto ele deverá pagar depois de realizar oito pagamentos, caso deseje liquidar a dívida com um único pagamento por ocasião do vencimento normal da 9^a prestação e quanto deverá pagar além da prestação então devida; d) determinar quanto ele deverá pagar no vencimento da 11^a prestação de modo que liquide a dívida, caso deixe de pagar as dez primeiras prestações.

40. Um financiamento será pago em determinado número de prestações mensais. Sabe-se que a razão entre o montante das prestações e o valor do financiamento é de 3,1721682. A juros efetivos de 8% a.m., determinar o número de prestações.
41. Um bem cujo valor à vista é de \$5.000 será pago com uma entrada de 20%, 18 prestações mensais de \$310 mais uma quantia de \$905,44 paga junto com a última prestação. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.
42. Um automóvel cujo valor à vista é de \$20.000 será pago com uma entrada de 10%, 24 prestações mensais de \$800 e quatro parcelas semestrais iguais. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o valor das parcelas semestrais.
43. Um bem cujo valor à vista é de \$8.000 será pago com uma entrada de 25%, nove prestações mensais iguais e um pagamento final de \$400 um mês após a última prestação. Considerando que será concedida uma carência de três meses para início do pagamento, calcular o valor das prestações a juros efetivos de 3% a.m.
44. Um veículo cujo valor à vista é de \$10.000 será pago com uma entrada de 20%. O saldo será pago em determinado número de prestações mensais de \$530 mais uma quantia residual inferior a 20% do valor da prestação mensal, paga um mês depois da última prestação. A juros efetivos de 2% a.m., determinar o número de prestações e o valor da quantia residual.
45. Uma pessoa pretende depositar mensalmente determinada quantia fixa durante 17 meses, a juros efetivos de 3% a.a. Considerando que o primeiro depósito ocorrerá daqui a 30 dias e que é desejável que os juros ganhos no período totalizem \$1.428,48, determinar o valor do depósito mensal.
46. Um equipamento que custa \$15.000 será pago em oito prestações mensais: as três primeiras de \$2.000, as três seguintes de \$800, a sétima de \$3.000 e a oitava de \$5.000. Determinar a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.
47. Um financiamento será pago em 15 prestações mensais antecipadas e consecutivas, iniciando-se logo ao término de um período de carência de seis meses. As primeiras cinco prestações serão de \$12.000, as cinco prestações seguintes, de \$14.000 e as cinco últimas, de \$17.000. Se esse esquema de pagamentos for trocado por outro em que o mutuário pague 15 prestações mensais iguais, também iniciando-se logo após um período de carência de seis meses, calcular o valor unitário dessas prestações, considerando que a taxa de juros de 3% a.m. será a mesma para qualquer plano de pagamento.
48. Uma pessoa deseja comprar um automóvel de \$15.000 daqui a três anos. Para tanto, hoje ela começou a fazer aplicações mensais iguais em um banco que paga uma taxa efetiva de 2% a.m. Qual deve ser o valor da aplicação mensal, de modo que possa comprar o veículo com o montante acumulado na data da última aplicação?
49. Um empréstimo tomado hoje será reembolsado em 12 prestações mensais de \$2.443,80 cada, a primeira para 30 dias. Se os juros que deverão ser pagos durante o período totalizam \$5.000, determinar a taxa de juros efetiva mensal contratada.
50. Que taxa de juros efetiva ao ano transforma 36 prestações mensais de \$100,00 em 12 prestações trimestrais de \$309,09 cada?
51. Tendo comprado uma motocicleta em 24 prestações mensais de \$210, o cliente propõe sua substituição para 12 prestações bimestrais. Qual será o valor dessas novas prestações, considerando uma taxa de juros de 2% a.m.?
52. Um empréstimo de \$20.000 contratado a juros efetivos de 2% a.m. será reembolsado em dois anos por meio de pagamentos a cada 90 dias. Se durante o primeiro ano deve ser amortizado 40% do empréstimo e o resto no segundo, calcular o valor do pagamento trimestral a ser efetuado em cada ano, considerando que incidem juros sobre os saldos pendentes não amortizados.

53. Uma empresa tomou um empréstimo de \$10.000 contratado a juros efetivos de 2% a.m. para ser reembolsado em 16 pagamentos trimestrais iguais, o primeiro para 90 dias. Imediatamente após efetuar o décimo pagamento, a empresa decide liquidar o resto da dívida. Qual é o importe a ser pago?
54. Uma pessoa pode comprar um carro à vista por \$17.000 ou a crédito, pagando 20 prestações trimestrais postecipadas de \$3.000 cada. Se ela pode aplicar seus recursos ganhando uma taxa efetiva de 5% a.m., qual é a melhor alternativa?
55. Com o objetivo de retirar \$778,26 a cada 30 dias, aplicam-se \$10.000 em um investimento que rende uma taxa efetiva de 2% a.m. Se o primeiro saque ocorrerá daqui a um mês, quantos saques serão possíveis?
56. Um equipamento cujo valor à vista é de \$8.000 é comprado em 2 de maio, pagando-se uma entrada de \$4.000 e prestações de \$923,90 a cada 30 dias. Quantas prestações serão necessárias para liquidar totalmente o financiamento? Em que data será paga a última? Considere que o banco financiador cobre uma taxa efetiva de 5% a.m. Utilize a tábua da p. 10.
57. Um empréstimo contratado à taxa efetiva de 4% a.m. foi liquidado em 12 prestações mensais postecipadas de \$500 cada. Quanto totalizaram os juros pagos no período?
58. Um empréstimo contratado a juros efetivos de 3% a.m. foi liquidado em 20 prestações mensais postecipadas. Se os juros pagos no período totalizaram \$1.024,51, determinar o valor das prestações.
59. Um bem pode ser financiado a juros efetivos de 2% a.m. e pago por um meio de entrada de 20% mais 12 parcelas mensais de \$55,2969 cada, sendo a primeira para 30 dias. Calcular o valor à vista.
60. Desejando dispor de \$10.000 dentro de 12 meses, uma pessoa começou hoje a aplicar mensalmente determinada quantia constante a juros efetivos de 2% a.m. Qual deve ser o valor de cada aplicação, de modo que ela consiga acumular o capital na data do último depósito?
61. Uma pessoa fez um determinado número de aplicações mensais de \$150 cada em um fundo de renda fixa que rende juros efetivos de 1% a.m. Caso pretenda resgatar o capital acumulado no prazo por meio de cinco saques mensais iguais e consecutivos de \$426,70 cada, sendo que o primeiro seria efetuado um mês depois da última aplicação, determinar o número de aplicações mensais no fundo.
62. A juros efetivos de 1% a.m., quantos depósitos mensais de \$150 serão necessários para acumular um capital de \$2.000? (A HP 12c arredonda o resultado. Usar logaritmos.)
63. Para que possa sacar \$500/mês, uma pessoa aplicou \$12.000 à taxa efetiva de 3% a.m. Quantos saques mensais poderão ser efetuados, se o primeiro inicia-se um mês depois da aplicação inicial? (A HP 12c arredonda o resultado. Usar logaritmos.)
64. Uma pessoa deve pagar 22 parcelas trimestrais postecipadas de \$350 cada. Se, no vencimento da 15ª parcela, ela decide liquidar a dívida, qual é o valor a ser pago, se a taxa efetiva aplicada for de 9% a.t.?
65. Substituir quatro prestações mensais postecipadas de \$500 por nove prestações equivalentes antecipadas. A taxa efetiva é de 2% a.m.
66. Um financiamento contratado à taxa efetiva de 10% a.m. foi quitado em cinco prestações mensais postecipadas. Considerando que os juros pagos no período totalizam \$3.189,87, calcular o valor das prestações.
67. Um financiamento a juros efetivos de 2% a.m. foi quitado em determinado número de prestações mensais postecipadas de \$4.243,17 cada. Se os juros pagos no período totalizam \$1.215,84, determinar o número de prestações contratadas.
68. Uma pessoa aplicou mensalmente \$1.000 durante 36 meses em um fundo de renda fixa. Se na data da última aplicação o extrato do fundo mostra que foram ganhos ao todo \$15.994,37 de juros, calcular a taxa mensal ganha.

CAPÍTULO

Séries variáveis

1 2 3 4 5 **6** 7 8 9 10 11

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Progressão aritmética
- Progressão geométrica
- Perpetuidades: custo capitalizado

6.1 Séries variáveis

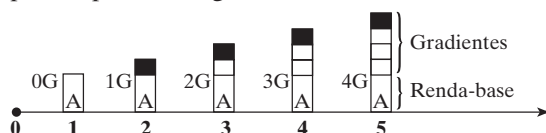
São comuns as situações em que as projeções dos fluxos de caixa das aplicações financeiras ou dos projetos de investimento são crescentes ou decrescentes ao longo do tempo. Neste capítulo, veremos basicamente dois tipos de fluxos: o primeiro é denominado *séries variáveis em progressão aritmética* e o segundo, *séries variáveis em progressão geométrica*.

No caso das séries variáveis em progressão aritmética, serão desenvolvidas e apresentadas fórmulas para o cálculo do valor atual e do montante. Para facilitar os cálculos, seguindo a didática adotada neste livro, todas as equações serão obtidas a partir dos fatores das séries uniformes postecipadas, já estudadas no Capítulo 5.

Para finalizar o capítulo, será calculado o valor atual de séries perpétuas que crescem a uma taxa constante, bem como o custo capitalizado de ativos que devem ser mantidos permanentemente e originam desembolsos que constituem uma renda perpétua.

6.2 Gradientes uniformes

Em uma anuidade postecipada cujos termos ou rendas variam de acordo com uma lei predeterminada, denomina-se gradiente a diferença entre duas rendas. O diagrama a seguir mostra uma anuidade postecipada com gradiente uniforme:

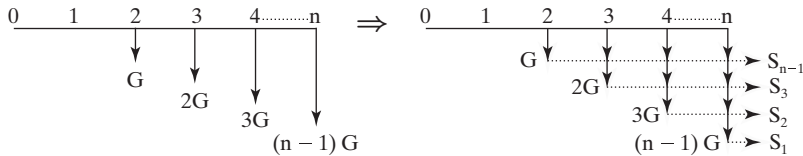


Cada termo da anuidade é constituído pela renda-base mais os gradientes acumulados, sendo a renda-base um importe igual à primeira anuidade. G representa o gradiente uniforme e A , o valor da renda-base.

6.2.1 Séries em progressão aritmética crescente

6.2.1.1 Séries postecipadas

A seguir, apresentamos os diagramas da série dos gradientes (postecipada) e de sua decomposição em $n - 1$ séries uniformes, com termos iguais ao gradiente G :



- Montante da série:

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} \\
 &= G \left\{ \frac{(1+i) - 1}{i} + \frac{(1+i)^2 - 1}{i} + \frac{(1+i)^3 - 1}{i} + \dots + \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} \right\} \\
 &= \frac{G}{i} \{ (1+i) - 1 + (1+i)^2 - 1 + (1+i)^3 - 1 + \dots + (1+i)^{n-1} - 1 \} \\
 &= \frac{G}{i} \{ [(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1}] + (1-n) \}
 \end{aligned}$$

A expressão entre colchetes é a soma de uma progressão geométrica de $n - 1$ termos, em que o primeiro termo (a_1) é igual a $1 + i$, e a razão (q) é igual a $1 + i$.

Utilizando a conhecida fórmula da soma das progressões geométricas:

$$S = \frac{G}{i} \left\{ \left[\frac{a_1 \times (q^{n-1} - 1)}{q - 1} \right] + (1 - n) \right\} = \frac{G}{i} \left\{ \left[\frac{(1+i) \times ((1+i)^{n-1} - 1)}{(1+i) - 1} \right] + (1 - n) \right\}$$

$$S = \frac{G}{i} \left\{ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - n \right\} = \frac{G}{i} (s_{\overline{n}|i\%} - n)$$

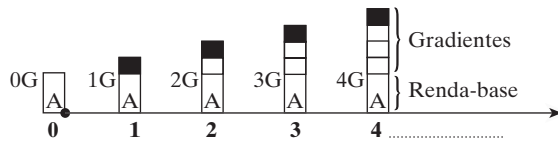
O valor presente da série é igual ao montante descontado n períodos à taxa de juros efetiva i :

$$P = \frac{\frac{G}{i} \left\{ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - n \right\}}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] = \frac{G}{i(1+i)^n} [s_{\overline{n}|i\%} - n]$$

6.2.1.2 Séries antecipadas

O diagrama a seguir apresenta uma anuidade antecipada com gradiente uniforme:



Seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, podemos obter as seguintes expressões para o montante e para o valor presente de séries antecipadas com gradiente uniforme:

$$S = \frac{G}{i} \left[(1+i) \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - n \right]$$

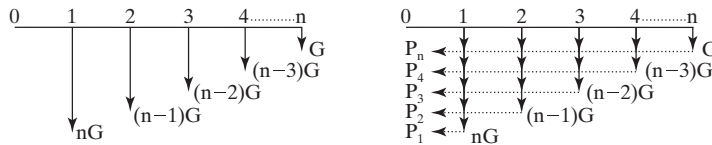
$$= \frac{G}{i} \left[(1+i) \times s_{\overline{n}|i\%} - n \right]$$

$$P = \frac{G}{i} \left[(1+i) \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right) - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

$$= \frac{G}{i} \left[(1+i) \times a_{\overline{n}|i\%} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

6.2.2 Séries em progressão aritmética decrescente

A seguir, apresentamos uma série gradiente uniforme e a decomposição dessa série em $n - 1$ séries uniformes com termos iguais ao gradiente G :



O valor presente da série é igual à soma dos valores presentes das n séries uniformes:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

$$= G \left[\frac{(1+i)^1 - 1}{(1+i)^1 \times i} \right] + G \left[\frac{(1+i)^2 - 1}{(1+i)^2 \times i} \right] + G \left[\frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i)^3 \times i} \right] + \dots + G \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

Tomando o mínimo múltiplo comum e simplificando algebricamente:

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^n \right] \right\}$$

O somatório entre colchetes é uma progressão geométrica com n termos, em que o primeiro termo (a_1) é igual a 1, e a razão (q) é igual a $1 + i$.

Utilizando a fórmula da soma das progressões geométricas, podemos obter as seguintes expressões para o valor presente e para o montante de séries antecipadas com gradiente uniforme:

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \right] \right\}$$

$$= \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{1 \times ((1+i)^n - 1)}{(1+i) - 1} \right] \right\}$$

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \right\}$$

$$= \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i\%} \right\}$$

$$S = \frac{G}{i} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \right\}$$

$$= \frac{G}{i} \left\{ n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i\%} \right\}$$

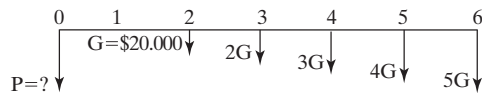
Observe que os cálculos referentes às séries gradientes uniformes são facilitados, expressando as diversas fórmulas em função dos fatores de séries uniformes (fatores $a_{\overline{n}|i\%}$ e $s_{\overline{n}|i\%}$) — disponíveis em tabelas financeiras ou facilmente calculados.

Exemplos de aplicação

Exemplo 6.1

Quanto devemos aplicar hoje, a uma taxa de juros efetiva de 6% a.m., de modo que sejam possibilitados cinco saques mensais e consecutivos? O primeiro saque deverá ser de \$20.000 daqui a dois meses e os outros, gradativamente crescentes, formando uma série gradiente uniforme.

- Diagrama de fluxo da série gradiente:



- Montante da série gradiente:

$$S = \frac{G}{i} \left[s_{\overline{n}|i\%} - n \right] = \frac{\$20.000}{0,06} \times \left[s_{\overline{6}|6\%} - 6 \right] = \frac{\$20.000}{0,06} \times \left[6,97532 - 6 \right] = \$325.106,64$$

- Valor presente da série:

$$P = \frac{S}{(1,06)^6} = \frac{\$325.106,64}{1,41852} = \$229.187,23$$

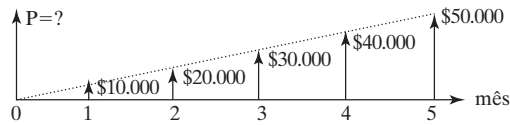
Podemos aplicar diretamente a fórmula da série postecipada com gradiente uniforme:

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left[s_{\overline{n}|i\%} - n \right] = \frac{\$20.000}{0,06 \times (1,06)^6} \times \left[s_{\overline{6}|6\%} - 6 \right] = \$229.187,23$$

Exemplo 6.2

Uma máquina permite uma economia de custos de \$10.000 no primeiro ano, que se torna gradativamente crescente à razão de \$10.000 por ano até o quinto ano de sua vida útil. Considerando uma taxa de juros efetiva de 12% a.a., calcular o valor presente dessa economia de custos.

- Diagrama de fluxo da economia de custos:

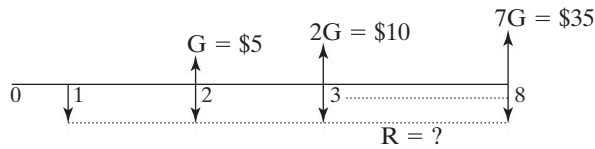


- Valor presente da série antecipada com gradiente uniforme:

$$P = \frac{G}{i} \left[(1 + i) \times a_{\overline{n}|i\%} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right] = \frac{\$10.000}{0,12} \times \left[1,12 \times a_{\overline{5}|12\%} - \frac{5}{(1,12)^5} \right] = \$100.018$$

▶ **Exemplo 6.3**

Quanto deverá ser aplicado de modo uniforme durante oito meses, a uma taxa efetiva de 5% a.m., para que possamos efetuar, já a partir do término do segundo mês, uma série de sete saques gradativamente crescentes, em que o primeiro seja igual a $G = \$5$, formando com os outros uma série gradiente uniforme igual a $G, 2G, 3G, \dots, 7G$?



Podemos realizar o cálculo do montante usando a fórmula das séries postecipadas:

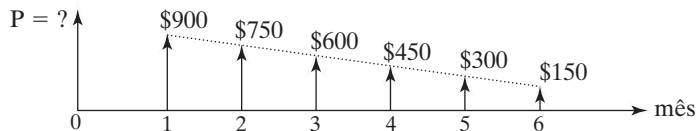
$$S = \frac{G}{i} \left[s_{\overline{n}|i\%} - n \right] = \frac{\$5}{0,05} \times \left[s_{\overline{8}|5\%} - 8 \right] = \$100 \times \left[9,549109 - 8 \right] = \$154,91$$

Cálculo do valor dos termos da série uniforme, equivalente à série gradiente:

$$R = \frac{S}{s_{\overline{8}|5\%}} = \frac{S}{\left[\frac{(1,05)^8 - 1}{0,05} \right]} = \frac{\$154,91}{9,549109} = \$16,22$$

▶ **Exemplo 6.4**

Considerando uma taxa de juros efetiva de 10% a.m., calcular o valor presente e o montante da seguinte série gradiente uniforme decrescente com seis termos postecipados:



Aplicando diretamente a fórmula do valor presente das séries decrescentes:

$$P = \frac{G}{i(1 + i)^n} \left[n(1 + i)^n - s_{\overline{n}|i\%} \right] = \frac{\$150}{0,10 \times (1,10)^6} \times \left[6 \times (1,10)^6 - s_{\overline{6}|10\%} \right] = \$2.467,11$$

Montante:

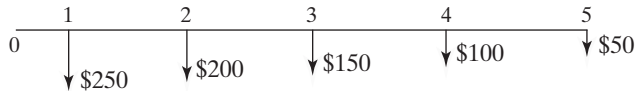
$$S = \frac{G}{i} \left[n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i\%} \right] = \frac{\$150}{0,10} \times \left[6 \times (1,10)^6 - s_{\overline{6}|10\%} \right] = \$4.370,63$$

Alternativamente, o montante pode ser calculado capitalizando-se por seis meses o valor presente da série:

$$S = P(1+i)^n = \$2.467,11 \times (1,10)^6 = 4.370,63$$

► Exemplo 6.5

Calcular a taxa de juros efetiva cobrada em um financiamento de \$692,78 que será pago em cinco prestações mensais de acordo com o esquema a seguir:



Valor presente da série decrescente:

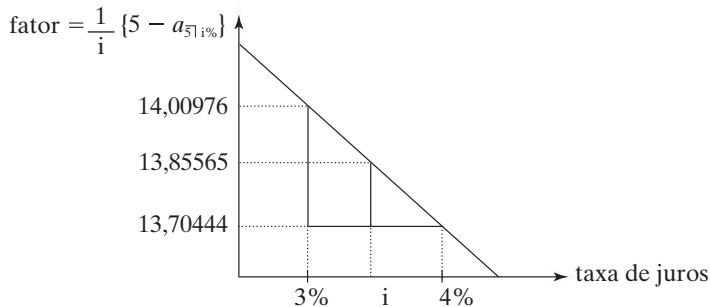
$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \right\}$$

Substituindo valores e interpolando a taxa:

$$\$692,78 = \frac{\$50}{i(1+i)^5} \left\{ 5(1+i)^5 - \left[\frac{(1+i)^5 - 1}{i} \right] \right\}$$

$$\frac{\$692,78}{\$50} = \frac{5}{i} - \left[\frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 i^2} \right]$$

$$13,85565 = \frac{1}{i} \left\{ 5 - \left[\frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 i} \right] \right\} = \frac{1}{i} \left\{ 5 - a_{\overline{5}|i\%} \right\} = \text{fator}$$

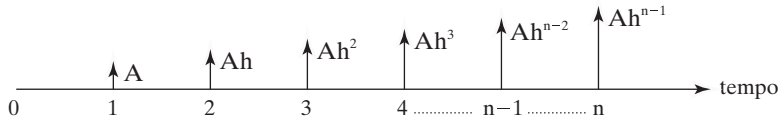


No diagrama, podemos fazer uma proporcionalidade de triângulos:

$$\frac{13,85565 - 13,70444}{4 - i} = \frac{14,00976 - 13,70444}{4 - 3} \Rightarrow i = 3,5\% \text{ a.m.}$$

6.3 Séries variáveis em progressão geométrica

A seguir, apresentamos o diagrama de uma série de pagamentos em progressão geométrica e o cálculo de seu valor presente:



$$P = \frac{A}{(1+i)} + \frac{Ah}{(1+i)^2} + \frac{Ah^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{Ah^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{Ah^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Observe que P é a soma de uma progressão geométrica de razão $q = h / (1 + i)$, em que o primeiro termo é igual a $a_1 = A / (1 + i)$.

Utilizando a fórmula da soma das progressões geométricas, obtém-se uma expressão para o valor presente da série:

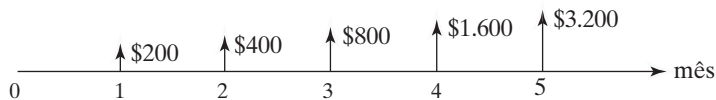
$$P = \left[\frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \right] = \left[\frac{\frac{A}{(1+i)} \times \left(\left(\frac{h}{1+i} \right)^n - 1 \right)}{\left(\frac{h}{1+i} \right) - 1} \right] \Rightarrow P = \frac{A}{(1+i)^n} \left[\frac{h^n - (1+i)^n}{h - (1+i)} \right]$$

A fórmula anterior serve tanto para o cálculo do valor presente de séries geométricas crescentes quanto para séries decrescentes. Basta que a razão de crescimento (h), que é igual a $(1 + c)$, seja calculada com '+c' para as séries crescentes e com '-c' para as decrescentes.

Exemplos de aplicação

Exemplo 6.6

A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor presente e o montante de uma série conforme o esquema a seguir:



onde: $c = 1$ (100%); $h = (1 + c) = 2$.

A razão de crescimento é obtida dividindo-se qualquer termo pelo anterior; por exemplo, $h = 800/400 = 2$.

- Valor presente da série:

$$P = \frac{A}{(1+i)^n} \left[\frac{h^n - (1+i)^n}{h - (1+i)} \right] = \frac{\$200}{(1,05)^5} \times \left[\frac{(2)^5 - (1,05)^5}{2 - (1,05)} \right] = \$5.067,97$$

- Montante da série: $S = 5.067,97 \times (1,05)^5 = \$6.648,15$

► **Exemplo 6.7**

Uma pessoa receberá mensalmente durante 18 meses uma série de pagamentos com reajuste mensal de 5%. Considerando que o primeiro pagamento, de \$48.000, será efetuado no fim do primeiro mês, calcular o valor presente da série de pagamentos a juros efetivos de 7% a.m.

Dados: $A = \$48.000$, $c = 5\%$ a.m., $h = (1 + c) = 1,05$, $i = 7\%$ a.m., $n = 18$, $P = ?$

$$P = \frac{A}{(1 + i)^n} \left[\frac{h^n - (1 + i)^n}{h - (1 + i)} \right] = \frac{\$48.000}{(1,07)^{18}} \times \left[\frac{(1,05)^{18} - (1,07)^{18}}{1,05 - 1,07} \right] = \$691.123,70$$

► **Exemplo 6.8**

A juros efetivos de 10% a.m., calcular o valor presente de uma série de 18 mensalidades que decrescem em progressão geométrica à razão de 1/2, sendo a primeira mensalidade igual a \$150.000.

Dados: $c = 0,5(50\%)$, $h = (1 - c) = 0,5$, $i = 10\%$ a.m., $n = 18$, $A = \$150.000$, $P = ?$

$$P = \frac{A}{(1 + i)^n} \left[\frac{h^n - (1 + i)^n}{h - (1 + i)} \right] = \frac{\$150.000}{(1,10)^{18}} \times \left[\frac{(0,5)^{18} - (1,10)^{18}}{0,5 - 1,10} \right] = \$250.000$$

► **Exemplo 6.9**

Se a taxa de juros efetiva vigente é de 4% a.a. e o valor do primeiro pagamento é igual a \$180.000, calcular o valor presente de uma série de dez pagamentos anuais que decrescem a uma taxa constante de 2% a.a.

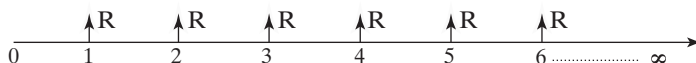
Dados: $n = 10$, $i = 4\%$ a.a., $c = 2\%$ a.a., $h = (1 - c) = 0,98$, $A = \$180.000$, $P = ?$

$$P = \frac{A}{(1 + i)^n} \left[\frac{h^n - (1 + i)^n}{h - (1 + i)} \right] = \frac{\$180.000}{(1,04)^{10}} \times \left[\frac{(0,98)^{10} - (1,04)^{10}}{0,98 - 1,04} \right] = \$1.344.044,67$$

6.4 Perpetuidades

O termo ‘perpetuidade’ sugere fluxos de duração infinita sem limite. Entretanto, é mais apropriado dizer que uma perpetuidade se constitui de um conjunto de rendas cujo número não pode ser determinado exatamente, pois é muito grande e tende ao infinito, como sucede, por exemplo, com os dividendos pagos pelas empresas. Tal como as rendas temporais, as rendas perpétuas podem ser postecipadas, antecipadas e diferidas.

O diagrama de fluxo de uma perpetuidade postecipada é apresentado a seguir:



Como ilustração, admitamos que uma pessoa invista \$1.000 em uma aplicação bancária que paga juros efetivos de 2% a.m. Essa aplicação permite-lhe retirar indefinidamente uma

renda mensal de \$20. Ao vencimento do primeiro mês, poderá retirar \$20, e o capital continuará sendo \$1.000, o que produzirá ao término do segundo mês uma nova renda de \$20 e assim sucessivamente. Considerando que o banco tem uma duração indefinida e que o capital inicialmente aplicado permanece constante, os juros obtidos mensalmente constituem uma renda perpétua. Por exemplo, nos três primeiros meses da perpetuidade, temos:

n (meses)	Capital inicial (P)	Montante $S = P(1 + i)$	Renda mensal (R)	Capital final
1	\$1.000	$\$1.000 \times (1,02) = \1.020	\$20	\$1.000
2	\$1.000	$\$1.000 \times (1,02) = \1.020	\$20	\$1.000
3	\$1.000	$\$1.000 \times (1,02) = \1.020	\$20	\$1.000

Está subentendido, no presente caso, que, ao fim de cada período, o fluxo gerado por P não é reinvestido na mesma perpetuidade. Então, podemos inferir que uma renda uniforme perpétua postecipada é o fluxo efetivo produzido em um período por uma taxa de juros sobre um importe P, em que o número de períodos de capitalização é infinitamente grande e não determinado.

$$R = P \times i \quad \text{e} \quad P = R \times \left(\frac{1}{i}\right)$$

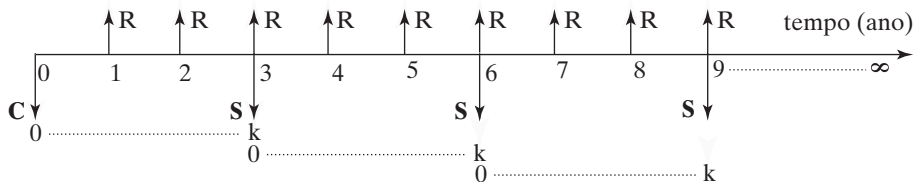
Se a perpetuidade postecipada cresce a uma taxa constante c, seu valor presente será dado por:

$$P = \frac{R}{i - c} \quad \text{para } i > c; \text{ onde: } i = \text{taxa de juros efetiva; } c = \text{taxa de crescimento.}$$

6.4.1 Custo capitalizado

Existem diversas atividades de produção ou serviços cujos ativos devem ser mantidos permanentemente, reformados ou substituídos periodicamente a cada certo número de anos. Essa reforma ou substituição origina desembolsos que constituem uma renda perpétua, tal como ocorre com a manutenção de estradas e pontes e com a substituição ou reforma de unidades de transporte público.

As substituições que ocorrem indefinidamente podem ser representadas no seguinte diagrama de fluxo:



- onde: R = renda periódica proporcionada pelo ativo durante sua vida útil;
- k = número de anos entre cada renovação de equipamentos (vida útil do ativo);
- C = custo inicial (custo original do ativo);
- S = custo de substituição ou reforma do ativo (deve ser igual ao montante acumulado pelas rendas proporcionadas pelo ativo durante sua vida útil).

Durante sua vida útil, o ativo produz rendas que devem acumular um fundo (S) que servirá para amortizar os gastos de sua manutenção e para pagar sua substituição ou reforma a cada k anos. Observando o primeiro intervalo de substituição, percebe-se que o problema corresponde ao cálculo da aplicação, que permitirá acumular um montante (S) que se repete indefinidamente.

$$R = \frac{S}{\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i} \right]} = S \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right]$$

$$\text{como } P = R \times \left(\frac{1}{i} \right) = S \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right] \times \left(\frac{1}{i} \right) = \left[\frac{S}{(1+i)^k - 1} \right]$$

O custo capitalizado (F) de um ativo está constituído pelo seu custo inicial (C) mais o valor presente (P) das infinitas substituições ou reformas a serem feitas de modo que ele seja mantido em operação indeterminadamente:

$$F = C + P = C + \left[\frac{S}{(1+i)^k - 1} \right]$$

↑ Exemplos de aplicação →

► Exemplo 6.10

Uma ação promete para daqui a um ano um dividendo de \$3,5/ação. Estimando-se que nos anos posteriores os dividendos cresçam a uma taxa constante de 5% a.a., calcular o valor da ação se o custo de oportunidade do capital for de 14% a.a. Considerar os dividendos como uma perpetuidade.

Dados: $R = \$3,5/\text{ação}$, $i = 14\%$ a.a., $c = 5\%$ a.a., $P = ?$

O valor da ação é igual ao valor presente de uma perpetuidade postecipada crescente (os dividendos) e pode ser calculado como se segue:

$$P = \left[\frac{R}{i - c} \right] = \frac{\$3,5}{0,14 - 0,05} = \$38,89/\text{ação}$$

► Exemplo 6.11

Ao participar de um Programa de Demissão Voluntária (PDV), um trabalhador recebeu \$10.000 da empresa. A fim de receber uma renda mensal indefinidamente, aplicou a importância em uma instituição financeira a juros efetivos de 1,5% a.m. Considerando que a taxa de juros não variará, calcular o valor da renda mensal perpétua.

Dados: $P = \$10.000$, $i = 1,5\%$ a.m., $R = ?$

$$R = P \times i = \$10.000 \times 0,015 = \$150$$

▶ **Exemplo 6.12**

O pedágio de uma rodovia estadual arrecada em média \$200.000/mês. Calcular o valor presente dessas rendas perpétuas, considerando um custo do capital de 2% a.m.

Dados: $R = \$200.000$, $i = 2\%$ a.m., $P = ?$

$$P = R \times \left(\frac{1}{i}\right) = \$200.000 \times \left(\frac{1}{0,02}\right) = \$10.000.000$$

▶ **Exemplo 6.13**

Uma universidade receberá uma doação mensal perpétua de \$50.000. Se aplicar o valor presente da perpetuidade em um fundo de renda fixa que rende juros efetivos de 2% a.m., qual será o rendimento ao término de um ano?

Dados: $R = \$50.000$, $i = 2\%$ a.m., $n = 12$ meses, $P = ?$, rendimento = ?

- Valor presente da perpetuidade:

$$P = R \times \left(\frac{1}{i}\right) = \$50.000 \times \left(\frac{1}{0,02}\right) = \$2.500.000$$

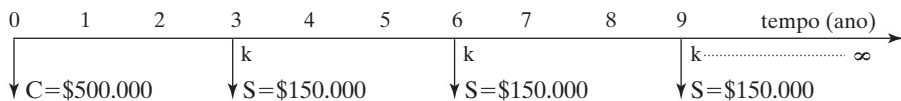
- Rendimento da aplicação ao término de 12 meses:

$$\text{Rendimento} = P(1+i)^n - P = \$2.500.000 \times (1,02)^{12} - \$2.500.000 = \$670.604,49$$

▶ **Exemplo 6.14**

Um canal de irrigação teve um custo inicial de \$500.000. O engenheiro projetista da obra estima que, para manter-se permanentemente em condições operacionais, a cada três anos deve ser realizada uma reforma do canal a um custo aproximado de \$150.000. Pede-se: a) calcular a quantia que deve ser aplicada hoje a juros efetivos de 15% ao ano, de modo que assegure a reforma perpétua do canal; b) o custo capitalizado do canal, admitindo-se um custo do capital de 15% a.a.

Dados: $C = \$500.000$, $S = \$150.000$, $i = 15\%$ a.a., $k = 3$, $P = ?$, $F = ?$



- a) Capital a ser aplicado hoje:

$$P = \left[\frac{S}{(1+i)^k - 1} \right] = \frac{\$150.000}{(1,15)^3 - 1} = \$287.976,96$$

Um capital de \$287.976,96, aplicado a juros de 15% a.a., transforma-se, em três anos, em um montante de \$437.976,96 [$\$287.976,96 \times (1,15)^3$], quantia que assegurará a retirada de \$150.000 indefinidamente para cobrir os custos das reformas, tal como comprova o quadro a seguir:

Montante ao final do 3º ano [$\$287.976,96 \times (1,15)^3$]	\$437.976,96
Custo da reforma do canal ao final do 3º ano	(\$150.000,00)
Saldo que gerará a cada 3 anos um novo montante de \$150.000	\$287.976,96

b) Custo capitalizado do canal de irrigação:

$$F = C + P = C + \left[\frac{S}{(1+i)^k - 1} \right] = \$500.000 + \$287.976,96 = \$787.976,96$$

Os \$787.976,96 permitirão cobrir o custo inicial do canal de \$500.000. O saldo de \$287.976,96, aplicado durante três anos a juros de 15% a.a., transforma-se em \$437.976,96 [$\$287.976,96 \times (1,15)^3$], quantia que permitirá cobrir os \$150.000 do custo da reforma, deixando um remanescente de \$287.976,96 que possibilitará a geração indefinida de um novo capital para reformas posteriores.

a. Custo original	\$500.000,00
b. Saldo que gerará o capital para reformas posteriores	\$287.976,96
c. Custo capitalizado (a + b)	\$787.976,96
Montante gerado a cada 3 anos [$287.976,96 \times (1,15)^3$]	\$437.976,96
Custo das reformas a cada 3 anos	(\$150.000,00)
Saldo que gerará a cada 3 anos a perpetuidade de \$437.976,96	\$287.976,96

Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias e fluxos postecipados (termos vencidos).

- Qual é a quantia a ser aplicada hoje em um investimento que rende juros efetivos de 10% a.m. de modo que possamos efetuar futuramente oito saques mensais? O primeiro saque de \$36.000 inicia-se daqui a dois meses, formando com os outros sete saques uma série crescente em *progressão aritmética*.
- Uma pessoa deve pagar 13 prestações mensais. A primeira prestação, de \$8.310, deve ser paga daqui a dois meses, formando com as restantes uma *progressão aritmética crescente*. A pessoa propõe pagar a dívida por meio de cinco prestações mensais iguais, a primeira iniciando-se daqui a um mês. A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor das prestações.
- Uma pequena empresa projeta, para os próximos 24 meses, desembolsos mensais com sua folha de pagamento. O primeiro desembolso, de \$480, deve ocorrer daqui a um mês, e os restantes, de forma consecutiva, formando uma *progressão aritmética decrescente* em que cada desembolso decresce \$20 em relação ao do mês anterior. O gerente da empresa pretende aplicar hoje determinada quantia em um investimento que rende juros efetivos de 5% a.m., de modo que possa efetuar, nos próximos 24 meses, saques mensais que permitam pagar a folha. Qual é o valor dessa aplicação?
- Os dividendos pagos por uma ação devem dobrar todo ano segundo uma *progressão geométrica*. Considerando que os dividendos são pagos ao término de cada ano, sendo o primeiro igual a \$10, calcular o valor presente dos dividendos dos próximos 24 anos a um custo de capital de 1% a.a.
- Um capital foi financiado a juros efetivos de 5% a.m. para ser pago em 20 prestações mensais. A primeira prestação, de \$12.000, vence um mês depois de contratado o financiamento, e as outras são gradativamente crescentes, formando uma *progressão aritmética*. Calcular o valor do financiamento.

6. Um financiamento de \$548,66 será pago em oito parcelas mensais. A primeira, de \$20, vence um mês depois de ter sido tomado o financiamento, e as restantes são gradativamente crescentes, formando uma *progressão aritmética*. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.
7. Um financiamento será pago em oito parcelas mensais. A primeira, de \$20, vence um mês depois de ter sido contratado o financiamento, e as outras são gradativamente crescentes, formando uma *progressão aritmética*. Considerando que seja proposto um esquema alternativo de pagamento em que o mutuário se obriga a pagar dez prestações mensais iguais, calcular o valor dessas prestações a juros efetivos de 5% a.m.
8. A juros efetivos de 9% a.m., calcular o valor presente de uma perpetuidade postecipada de \$10.000, que cresce a uma taxa constante de 7% a.m.
9. Calcular o valor presente de quatro mensalidades postecipadas que decrescem a uma taxa constante de 3% a.m., considerando que a primeira é igual a \$13.000 e a taxa de juros efetiva é de 5% a.m.
10. Uma ação promete pagar um dividendo de \$2,00/ano a partir do próximo ano, em perpetuidade. Considerando um crescimento projetado dos dividendos de 5% a.a. e um custo de oportunidade do capital de 12% a.a., determinar o preço unitário da ação.
11. Uma dívida de \$2.000 será paga em quatro prestações trimestrais, a primeira vencendo daqui a um mês. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o valor das quatro prestações, sabendo que formam uma *progressão aritmética crescente* com razão igual ao valor da primeira prestação.
12. Calcular o primeiro termo de uma série de 20 anuidades, crescentes geometricamente, com valor presente de \$5.000, razão de crescimento de 1,04 e anuidades capitalizadas a juros efetivos de 5% a.a.
13. Calcular o valor presente de um empréstimo que será amortizado em 24 parcelas trimestrais postecipadas a juros efetivos de 3% a.t. A primeira parcela é igual a \$500 e crescerá à taxa de 5% em relação à anterior.
14. Um empréstimo de \$5.000 será reembolsado em oito parcelas mensais postecipadas (a primeira para daqui a dois meses) em *progressão aritmética crescente*. Se a taxa de juros efetiva for de 6%, calcular o valor do gradiente da série de parcelas.
15. Um empréstimo de \$6.630,14 será reembolsado em determinado número de parcelas mensais que experimentarão um crescimento de 9% a.m. A juros efetivos de 6% a.m., determinar o número de parcelas, sabendo que o valor da primeira é de \$500.
16. Um empréstimo de \$5.000 será reembolsado em dez parcelas mensais vencidas que experimentarão um crescimento geométrico de 2% em cada uma. A juros efetivos de 4% a.m., calcular o valor da primeira parcela.
17. Um financiamento será reembolsado em oito parcelas trimestrais vencidas, que crescem à taxa de 2%. Se a primeira parcela é de \$1.500, a juros efetivos de 4% a.t., determinar o valor do financiamento.
18. Um financiamento de \$5.000 será reembolsado em dez parcelas mensais vencidas que crescem geometricamente a determinada taxa. Se o valor da primeira parcela for de \$571,58 e a taxa de juros efetiva for de 5% a.m., calcular a taxa de crescimento das parcelas.
19. Um canal de irrigação tem um custo de construção de \$40.000. Para mantê-lo em condições operacionais, deve ser efetuada uma reforma integral ao custo de \$8.000 a cada cinco anos indefinidamente. Calcular seu custo capitalizado a uma taxa efetiva de 8% a.a.
20. Uma ponte tem um custo de construção de \$30.000 e sua vida útil é de dez anos. Depois desse tempo deve ser reformada a cada dez anos indefinidamente, a um custo de \$15.000. Calcular seu custo capitalizado a uma taxa efetiva de 1% a.m.
21. A prefeitura de uma cidade recebeu duas propostas para construir uma passarela para pedestres. A primeira propõe construí-la de madeira, ao custo de \$10.000, com um custo de manutenção de \$4.000 a cada três anos indefinidamente. A segunda propõe construí-la de aço, ao custo de \$20.000, com um custo de manutenção de \$6.000 a cada seis anos. Considerando um custo do capital de 6% a.a., selecionar a melhor proposta.

CAPÍTULO

Capitalização contínua

1 2 3 4 5 6 **7** 8 9 10 11

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Valor presente de valores uniformemente distribuídos

Nos capítulos anteriores, os capitais usados foram valores monetários concentrados em determinadas datas (capitais discretos). No regime de capitalização contínua, os valores monetários *fluem contínua e uniformemente* ao longo do tempo segundo uma função matemática.

A capitalização contínua é uma ferramenta muito usada em finanças na avaliação de opções, derivativos, projetos de investimento, geração de lucros da empresa, desgaste de equipamentos e outras situações em que os fluxos monetários se encontram distribuídos uniformemente no tempo.

Na prática, muitas situações exigem o uso da capitalização contínua. As empresas recebem e fazem pagamentos muitas vezes durante um dia, padrão este que está mais próximo da suposição de fluxos contínuos uniformemente distribuídos do que de fluxos discretos de fim de período.

A computação contínua de juros é uma modalidade alternativa de cálculo de juros que permite resolver alguns problemas de matemática financeira e engenharia econômica que, de outro modo, têm soluções apenas aproximadas.

Um capital de \$100, aplicado por um ano à taxa nominal de 24% a.a., resulta nos seguintes montantes, considerando-se diversas hipóteses de frequência das capitalizações da taxa nominal:

	Capitalização	Montante
Anual (k = 1)	$\$100 \times (1 + 0,24)$	= \$124,00
Semestral (k = 2)	$\$100 \times (1 + 0,24 / 2)^2$	= \$125,44
Trimestral (k = 4)	$\$100 \times (1 + 0,24 / 4)^4$	= \$126,25
Mensal (k = 12)	$\$100 \times (1 + 0,24 / 12)^{12}$	= \$126,82
Diária (k = 365)	$\$100 \times (1 + 0,24 / 365)^{365}$	= \$127,12

Repare que o montante aumenta à medida que a frequência das capitalizações aumenta. Se hipoteticamente admitirmos uma capitalização horária, teremos o seguinte montante ao fim do ano:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = 100 \times \left(1 + \frac{0,24}{24 \times 365} \right)^{(365 \times 24) \times 1} = \$127,12$$

Observe que o montante praticamente não cresce com a capitalização horária, tendendo para um valor-limite de \$127,12.

Estando claro que o montante de um capital tende a um limite quando a frequência das capitalizações tende ao infinito, desenvolvemos a seguir uma expressão de cálculo que serve como base da computação contínua de juros.

O montante de um capital aplicado pelo prazo m , a juros nominais j , capitalizados k vezes, pode ser expresso do seguinte modo:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = P \left[\left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right]^{j \times m}$$

Admitindo que a capitalização seja *infinitamente* grande, ou seja, em intervalos *infinitesimais tendendo ao infinito*, no limite temos:

$$S = P \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right]^{j \times m}$$

Pode-se demonstrar em cálculo que, quando $k \rightarrow \infty$, o limite do termo entre colchetes da expressão anterior é um número irracional ($e = 2,718281828459\dots$), que serve de base aos logaritmos *neperianos* ou naturais, e também que $j = \delta$. Logo, podemos calcular o montante de um capital na computação contínua de juros por meio da seguinte expressão:

$$S = P \times e^{\delta \times m}$$

onde δ é chamada *taxa instantânea ou contínua*, sendo essa letra grega (delta) a notação comumente adotada. A expressão anterior é a base da computação contínua de juros. Basta fornecer o valor de δ , uma vez que k , por hipótese, tende ao infinito, condição para que a computação de juros seja contínua.

Um capital de \$200.000 aplicado por 18 meses à taxa de 3% a.m. resulta nos seguintes montantes na computação contínua e na capitalização discreta de juros:

$$S = P \times e^{\delta \times m} = \$200.000 \times e^{0,03 \times 18} = \$343.201,37$$

$$S = P (1 + i)^m = \$200.000 \times (1,03)^{18} = \$340.486,61$$

Sabe-se que o montante produzido por duas taxas de juros equivalentes deve ser o mesmo. Assim, igualando os montantes das computações contínua e discreta, podemos obter uma relação de equivalência entre taxas de juros discretas e contínuas:

$$P \times e^{\delta \times m} = P (1 + i)^m \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} i = e^{\delta} - 1 \text{ (taxa efetiva)} \\ \delta = \ln(1 + i) \text{ (taxa contínua equivalente)} \end{cases}$$

Adotando uma taxa de juros efetiva i de uma capitalização discreta de juros, $\delta = \ln(1 + i)$ é a taxa nominal equivalente para uma capitalização contínua.

Exemplos de aplicação

Exemplo 7.1

Calcular o montante de um capital de \$1.000 aplicado por um ano à taxa contínua de 50% a.a.

Dados: $P = \$1.000$, $\delta = 50\%$ a.a., $m = 1$, $S = ?$

$$S = P \times e^{\delta \times m} = \$1.000 \times e^{0,50 \times 1} = \$1.648,72$$

Exemplo 7.2

Calcular a taxa contínua equivalente à taxa nominal de 40% a.a. capitalizada mensalmente.

Dados: $j = 40\%$ a.a., $k = 12$, $m = 1$, $\delta = ?$

Para serem equivalentes, as duas taxas devem resultar no mesmo montante:

$$P \times e^{\delta \times m} = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} \Rightarrow e^{\delta} = \left(1 + \frac{0,40}{12} \right)^{12} = 1,48213$$

Aplicando logaritmos: $\delta \times \ln e = \ln 1,48213 \Rightarrow \delta = 0,3935 = 39,35\%$ a.a.

Exemplo 7.3

Determinar a taxa efetiva trimestral equivalente a uma taxa contínua de 35% a.a.

Dados: $\delta = 35\%$ a.a., $i_t = ?$

$$(1 + i_a) = e^{\delta}$$

$$(1 + i_t)^4 = e^{0,35} \Rightarrow i_t = (e^{0,35})^{1/4} - 1 = 9,1442\% \text{ a.t.}$$

Exemplo 7.4

Pede-se: a) calcular a taxa efetiva ao ano equivalente a uma taxa contínua de 90% a.a;

b) calcular a taxa contínua equivalente a uma taxa efetiva de 80% a.a.

a) Dados: $\delta = 90\%$ a.a., $i_a = ?$

$$(1 + i_a) = e^{\delta} \Rightarrow i_a = e^{0,90} - 1 = 1,459603 = 145,96\% \text{ a.a.}$$

b) Dados: $i_a = 80\%$ a.a., $\delta = ?$

$$\delta = \ln(1 + i_a) = \ln(1 + 0,80) = 0,5877787 = 58,78\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 7.5

Pede-se: a) demonstrar que um capital de \$1.200 aplicado durante 20 meses resulta no mesmo montante à taxa efetiva de 5% a.m. ou à taxa contínua de 4,879% a.m.; b) calcular o valor atual de um montante de \$1.200 que será recebido daqui a cinco meses, à taxa contínua de 6% a.m.

a) Dados: $P = \$1.200$, $i = 5\%$ a.m., $m = 20$, $\delta = 4,879\%$ a.m., $S = ?$

$$S = P \times e^{\delta \times m} = \$1.200 \times e^{0,04879 \times 20} = \$3.183,95$$

$$S = P(1 + i)^m = \$1.200 \times (1,05)^{20} = \$3.183,95$$

O montante é o mesmo, dado que a taxa efetiva de 5% a.m. é equivalente à taxa contínua de 4,879% a.m. ($\delta = \ln(1,05) = 4,879\%$).

b) **Dados:** $S = \$1.200$, $\delta = 6\%$ a.m., $m = 5$, $P = ?$

$$P = S \times e^{-\delta \times m} = \$1.200 \times e^{-0,06 \times 5} = \$888,98$$

► **Exemplo 7.6**

Uma plantação de eucaliptos para fabricação de celulose tem 80.000 m³ de madeira. O preço atual da madeira é de \$20/m³, e a taxa contínua de crescimento das árvores é de 20% a.a. Pedese: a) calcular o valor intrínseco da plantação após quatro anos; b) determinar o prazo em que dobra o valor intrínseco da plantação.

Dados: $P = 80.000 \text{ m}^3 \times \$20/\text{m}^3$, $\delta = 20\%$ a.a., $m = 4$, $S = ?$

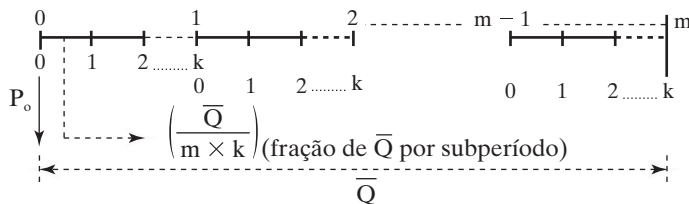
a) $S = P \times e^{\delta \times m} = (80.000 \text{ m}^3 \times \$20/\text{m}^3) \times e^{0,20 \times 4} = \$3.560.865,49$

b) $S = P \times e^{\delta \times m} \Rightarrow 2P = Pe^{\delta \times m} \Rightarrow 2 = e^{0,20 \times m} \Rightarrow m = \ln 2/0,20 = 3,47$ anos.

7.1 Valor presente de capitais uniformemente distribuídos

Em algumas situações encontradas na análise de investimentos, os fluxos monetários não são devidos ou recebidos em dado instante pontual, mas estão distribuídos ao longo de determinado período. Como exemplos, temos: o custo anual de manutenção dos equipamentos, a receita produzida por uma estação de bombeamento operando a uma potência e um desempenho constantes durante determinado período, a receita de um poço de petróleo produzindo a uma vazão constante durante um intervalo de tempo, o fluxo de caixa de uma empresa etc.

O diagrama a seguir representa um capital \bar{Q} distribuído em fluxo uniforme ao longo de m períodos que, por sua vez, dividem-se em k subperíodos:



Se a computação de juros for discreta e as frações do capital forem deslocadas para o fim de seu respectivo período, o valor presente das $m \times k$ frações será:

$$P_0 = \left(\frac{\bar{Q}}{k \times m} \right) \left[\frac{\left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} - 1}{\left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} \left(\frac{j}{k} \right)} \right] = \left(\frac{\bar{Q}}{j \times m} \right) \left[\frac{\left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right\}^{m \times j} - 1}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right\}^{m \times j}} \right]$$

A equação anterior é correta, considerando-se que as $m \times k$ frações do capital \bar{Q} foram deslocadas arbitrariamente para o fim de seus respectivos períodos. Contudo, se considerarmos uma capitalização em intervalos infinitesimais, esse deslocamento se tornará irrelevante. Logo, aplicando-se o limite quando $k \rightarrow \infty$:

$$P_0 = \bar{Q} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{j \times m} \right) \left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right\}^{m \times j} - 1}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right\}^{m \times j}} \right] = \bar{Q} \left[\frac{1}{\delta \times m} \left(\frac{e^{m \times \delta} - 1}{e^{m \times \delta}} \right) \right]$$

Ou seja, quando $k \rightarrow \infty$, o limite dos termos entre chaves é o número irracional (e), que serve de base aos logaritmos *neperianos* ($e = 2,718281828459\dots$), e a taxa nominal passa a ser igual à taxa contínua ($j = \delta$). Logo, a seguinte expressão permite calcular o valor presente de um capital \bar{Q} distribuído uniformemente durante m períodos:

$$P_0 = \bar{Q} \left[\frac{1 - e^{-m \times \delta}}{\delta \times m} \right]$$

Exemplos de aplicação

Exemplo 7.7

Um projeto de irrigação proporcionará um lucro total de \$64 milhões em 20 anos de operação. Calcular o valor atual desse lucro, considerando realização dos lucros em regime de fluxo uniforme e uma taxa contínua equivalente à taxa de juros efetiva discreta de 8% a.a.

Dados: $i = 8\%$ a.a., $m = 20$, $\bar{Q} = \$64$ milhões, $P_0 = ?$

Taxa de juros contínua equivalente:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1,08) = 0,07696104 = 7,696104\% \text{ a.a.}$$

Valor presente do lucro de \$64 milhões realizado em fluxo uniforme ao longo de 20 anos:

$$P_0 = \bar{Q} \left[\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right] = \$64 \times \left[\frac{1 - e^{-0,07696104 \times 20}}{0,07696104 \times 20} \right] = \$32,66 \text{ milhões}$$

Exemplo 7.8

Um estudo de engenharia indicou que um poço produtor de petróleo proporcionará receitas líquidas anuais de \$4 milhões em cada um dos seis anos de sua vida útil. Considerando fluxos uniformemente distribuídos, calcular o valor presente das receitas usando uma taxa contínua equivalente à taxa discreta de 12% a.a.

• Taxa contínua equivalente:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1,12) = 0,11332869$$

- Receita líquida discreta anual no início de cada ano ($m = 1$):

$$P_0 = \bar{Q} \left[\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right] = \$4 \times \left[\frac{1 - e^{-0,11332869 \times 1}}{0,11332869 \times 1} \right] = \$3,78 \text{ milhões/ano}$$

Observe que as receitas discretas constituem uma série uniforme antecipada de seis termos.

- Valor presente da série de receitas líquidas discretas:

$$VP = P_0 + P_0 \times \left[\frac{(1 + i)^{n-1} - 1}{(1 + i)^{n-1} \times i} \right] = \$3,78 + \$3,78 \times \left[\frac{(1,12)^5 - 1}{(1,12)^5 \times 0,12} \right] = \$17,41 \text{ milhões}$$

Exemplo 7.9

Estima-se que o tempo de construção de um canal de irrigação orçado em \$2 milhões será de dois anos. Por ano, a partir do segundo ano, a manutenção operacional do canal exigirá um gasto de 0,5 milhão. Considerando fluxos uniformemente distribuídos e uma taxa contínua equivalente à taxa discreta de 20% a.a., calcular o valor presente de todos os custos e gastos associados ao projeto.

- Taxa contínua equivalente:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1,20) = 0,182322$$

- Valor presente do custo de construção do canal despendido ao longo de dois anos:

$$\bar{Q} \left[\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right] = \$2 \times \left[\frac{1 - e^{-0,182322 \times 2}}{0,182322 \times 2} \right] = \$1,6759 \text{ milhão}$$

O custo de construção é desembolsado em regime uniforme durante dois anos ($m = 2$).

- Valor discreto equivalente no início de cada ano dos gastos de manutenção (perpetuidade postecipada):

$$\bar{Q} \left[\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right] = \$0,5 \times \left[\frac{1 - e^{-0,182322 \times 1}}{0,182322 \times 1} \right] = \$0,4571 \text{ milhão/ano}$$

- Valor presente dos gastos de manutenção (valor presente da perpetuidade discreta):

$$\frac{\$0,4571}{0,20} = \$2,2855$$

- Valor presente de todos os custos e gastos:

$$VP = \$1,6759 + \$2,2855 = \$3,9614 \text{ milhões}$$

► Exemplo 7.10

Uma empresa industrial gastou, no período de dez meses, \$50.000 em lubrificantes para a manutenção de seus equipamentos. A juros contínuos equivalentes à taxa discreta de 5% a.m., calcular o valor presente desses gastos, considerando realização uniforme.

Dados: $i = 5\%$ a.m., $\bar{Q} = \$50.000$, $m = 10$, $P = ?$

- Taxa contínua equivalente:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1,05) = 0,0487902$$

- Valor presente dos gastos:

$$P = \bar{Q} \times \left[\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right] = \$50.000 \times \left[\frac{1 - e^{-0,0487902 \times 10}}{0,0487902 \times 10} \right] = \$39.566,04$$

► Exemplo 7.11

A prefeitura de uma pequena cidade do interior do Ceará pretende instalar um sistema de tratamento de água potável, orçado em \$1.800.000 e projetado para funcionar durante dez anos a partir da conclusão das obras. O investimento será efetuado ao longo do período de obras (dois anos) em regime de realização uniformemente distribuída. Atualmente, o fornecimento de água é feito por caminhões-pipa, ao custo de \$310.000/ano, sem nenhuma arrecadação pelo serviço prestado. A prefeitura projeta faturar, a partir do término das obras (a partir do terceiro ano), \$90.000/ano dos consumidores com a venda de água encanada. A manutenção do sistema em funcionamento deverá custar \$50.000 por ano. Considerando que a obra será financiada com recursos da Caixa Econômica Federal, a juros efetivos de 9% a.a., e que as receitas e despesas têm realização uniformemente distribuída, justifica-se o projeto do ponto de vista econômico? Na avaliação, usar taxa contínua equivalente.

Dados:

- Investimento despendido uniformemente durante dois anos = \$1.800.000 (ano 1 e ano 2)
- Benefício anual realizado uniformemente = \$310.000 + \$90.000 = \$400.000
- Gasto de manutenção realizado uniformemente = \$50.000/ano
- Fluxo de caixa realizado uniformemente = \$400.000 - \$50.000 = \$350.000 (ano 3 ... ano 12)
- Taxa de juros efetiva discreta = 9% a.a.
- Taxa de juros instantânea equivalente = $\ln(1,09) = 0,0861777$

O quadro a seguir mostra os fluxos de caixa com realização uniformemente distribuída ao longo do tempo:

Ano	1-2	3	4	5	6	12
Fluxo de caixa	-\$1.800.000	\$350.000	\$350.000	\$350.000	\$350.000	\$350.000

- Valor presente do investimento:

$$\bar{Q} \left[\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right] = \$1.800.000 \times \left[\frac{1 - e^{-0,0861777 \times 2}}{0,0861777 \times 2} \right] = \$1.653.421$$

- Fluxo de caixa anual discreto no início do ano respectivo:

$$\bar{Q} \left[\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right] = \$350.000 \times \left[\frac{1 - e^{-0,0861777 \times 1}}{0,0861777} \right] = \$335.343$$

- Valor presente do fluxo de caixa anual discreto:

$$\$335.343 \times \left[\frac{(1,09)^{10} - 1}{(1,09)^{10} \times 0,09} \right] / (1,09) = \$1.974.419$$

- Valor presente líquido do projeto: $VPL = -\$1.653.421 + \$1.974.419 = \$320.998 > 0$

O projeto se justifica economicamente, pois o VPL é positivo. 

Exercícios propostos

1. Determinar a taxa contínua (instantânea) ao ano equivalente à taxa efetiva de 15% a.a.
2. Calcular a taxa efetiva ao ano equivalente à taxa instantânea de 13,9762% a.a.
3. Qual é a taxa instantânea anual equivalente a uma taxa nominal de 60% a.a. capitalizada trimestralmente?
4. Calcular a taxa nominal ao ano capitalizada mensalmente, equivalente à taxa instantânea de 24% a.a.
5. Calcular a taxa efetiva semestral equivalente a uma taxa instantânea de 20% a.a.
6. Determinar a taxa efetiva para o período de 41 dias equivalente a uma taxa instantânea de 30% a.a.
7. Calcular o montante de uma aplicação de \$1.000 por 15 meses à taxa instantânea de 4% a.m.
8. Qual é o capital que resulta em um montante de \$1.000 quando aplicado por 18 meses à taxa instantânea de 6% a.m.?
9. Se um capital fosse aplicado por sete meses a determinada taxa instantânea, resultaria em um montante 50% maior ao obtido a juros efetivos de 4% a.m. Determinar a taxa instantânea.
10. A juros efetivos de 10% a.a., calcular os valores uniformemente distribuídos equivalentes aos seguintes valores discretos: \$1.450, \$235.980, \$45.789.000.
11. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 15% a.a., calcular os valores discretos equivalentes aos seguintes valores uniformemente distribuídos: \$2.000, \$324.000, \$1.289.000.
12. Uma mina de ouro, durante uma vida útil de oito anos, proporcionou receitas operacionais líquidas de \$500.000/mês. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 42,5761% a.a., calcular o valor presente da receita total, considerando-a realizada em regime de fluxo uniformemente distribuído.
13. Um equipamento tem vida útil de 15 anos e custo de manutenção de \$4.500/ano. Considerando realização em fluxo uniformemente distribuído, estimar o valor presente desse custo a juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 10% a.a.

14. Um projeto, em cada um dos seus seis anos de vida útil, proporcionará os seguintes lucros líquidos em milhões: \$5, \$6, \$5, \$3, \$4, \$2. A uma taxa de juros contínua equivalente à taxa efetiva de 10% a.a., calcular o valor presente dos lucros, considerando sua realização em regime de fluxo uniforme.
15. Nos próximos dez anos, a evolução dos custos operacionais de uma estrada de ferro deverá aumentar à razão de \$2 milhões por ano. Considerando que no primeiro ano o custo operacional é de \$3 milhões, a juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 12% a.a., calcular o valor presente desses custos, supondo que sejam realizados em regime de fluxo uniforme.
16. O custo anual de manutenção de um trecho permanente de estrada é de US\$200.000. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 14% a.a., calcular o valor presente desses custos, considerando-os perpetuidades constantes realizadas em regime de fluxo uniforme.
17. A receita operacional de um equipamento será de \$120.000/ano. O equipamento tem vida útil de dez anos e custa \$1 milhão. Calcular o VPL, considerando juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 20% a.a. e receitas realizadas em regime de fluxo uniforme.
18. Ao longo de sua vida útil de 15 anos, um poço de gás natural rendeu lucros totais de \$25 milhões. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 20% a.a., calcular o valor presente desses lucros na hipótese de serem realizados em regime de fluxo uniforme.
19. Um projeto requer um investimento de \$25 milhões a ser despendido em três anos. Ao longo de sua vida útil de 25 anos, o projeto renderá \$2,8 milhões/ano já a partir do primeiro ano. Considerando uma taxa contínua equivalente à taxa efetiva de 20% a.a. e realização em regime de fluxo uniforme, avaliar economicamente o projeto usando o valor presente líquido (VPL).

Planos de amortização de empréstimos e financiamentos

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Sistema de Amortização Francês (Tabela Price)
- Sistema de Amortizações Constantes (SAC)
- Sistema de Amortizações Misto (SAM)
- Sistema de Amortização Americano
- Custo efetivo de planos de amortização
- Sistemas de financiamento habitacional

8.1 Reembolso de empréstimos e financiamentos

A amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga progressivamente por meio de parcelas, de modo que ao término do prazo estipulado o débito seja liquidado. Essas parcelas ou prestações são a soma de duas partes: a amortização ou devolução do principal emprestado e os juros correspondentes aos saldos do empréstimo ainda não amortizado.

$$\text{prestação} = \text{amortização} + \text{juros}$$

Essa separação permite discriminar o que representa a devolução do principal (amortização) daquilo que representa o serviço da dívida (os juros). É importante para as necessidades jurídico-contábeis e para a análise de investimentos, em que os juros, por serem dedutíveis para efeitos tributáveis, têm um efeito fiscal.

O termo 'carência' designa o período que vai desde a data de concessão do empréstimo até a data em que será paga a primeira prestação. Em geral, esse período é negociado entre o credor e o mutuário. Qualquer sistema de amortização pode ter ou não um prazo de carência.

Entre os principais e mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos, temos o Sistema de Amortização Francês (conhecido também como Tabela Price), o Sistema de Amortizações Constantes (SAC), o Sistema de Amortização Americano e o Sistema de Amortizações Misto (SAM), conhecido como Sistema de Amortizações Crescentes (Sacre). Algumas vezes, os bancos e as instituições financeiras criam sistemas de amortização específicos, não convencionais, adequados a determinadas situações ou características de seu mercado ou seus clientes.

Neste capítulo, por questões didáticas, evitaremos na medida do possível o excesso de fórmulas e equações matemáticas, preferindo apresentar a mecânica de cálculo por meio de planilhas autoexplicativas.

8.1.1 Sistema de Amortização Francês (Tabela Price)

A denominação Sistema de Amortização Francês origina-se do fato de esse sistema ter sido utilizado inicialmente na França, no século XIX. O sistema caracteriza-se por pagamentos do *principal* em prestações iguais, periódicas e sucessivas. É o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. Como os juros incidem sobre o saldo devedor que, por sua vez, decresce à medida que as prestações são pagas, eles são decrescentes e, conseqüentemente, as amortizações do principal são crescentes.

O Sistema ou Tabela Price tem esse nome em homenagem ao economista inglês Richard Price, que incorporou a teoria do juro composto às amortizações de empréstimos, no século XVIII. Basicamente, a Tabela Price é um caso particular e muito utilizado do Sistema de Amortização Francês, em que a taxa de juros é dada em termos nominais (na prática, é dada em termos anuais) e as prestações têm período menor que aquele a que a taxa de juros se refere (em geral, as amortizações são pagas em base mensal). Nesse sistema, o cálculo das prestações é feito usando-se a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação, calculada a partir da taxa nominal.

Exemplos de aplicação

Exemplo 8.1

Um empréstimo de \$200.000 será pago pela Tabela Price em quatro prestações mensais postecipadas. A juros efetivos de 10% a.m., construir a planilha de amortização.

Para determinado período, os juros são calculados sobre o saldo devedor do empréstimo ao início desse período; a amortização é a diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros respectivos; e o saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior menos a amortização do respectivo período. A planilha a seguir mostra os valores:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$200.000,00	—	—	—
1	\$156.906,00	\$43.094,00	\$20.000,00	\$63.094,00
2	\$109.502,60	\$47.403,40	\$15.690,60	\$63.094,00
3	\$57.358,86	\$52.143,74	\$10.950,26	\$63.094,00
4	—	\$57.358,86	\$5.735,89	\$63.094,00

A planilha é autoexplicativa. Entretanto, a seguir, mostramos o procedimento utilizado no cálculo dos diversos valores:

a) Cálculo da prestação do t -ésimo período:

$$R_t = \frac{P}{a_{\overline{4}|10\%}} = \frac{\$200.000}{\left[\frac{(1,10)^4 - 1}{(1,10)^4 \times 0,10} \right]} = \frac{\$200.000}{3,16987} = \$63.094$$

b) Cálculo dos juros do t -ésimo período:

$$J_t = i \times SD_{t-1}; \text{ por exemplo, para } t = 2: J_2 = i \times SD_1 = 0,10 \times \$156.906,60 = \$15.690,60$$

c) Cálculo da amortização do t -ésimo período:

$$A_t = R_t - J_t; \text{ para } t = 2: A_2 = R - J_2 = \$63.094,00 - \$15.690,60 = \$47.403,40$$

d) Cálculo do saldo devedor do t -ésimo período:

$$SD_t = SD_{t-1} - A_t; \text{ para } t = 2: SD_2 = SD_1 - A_2 = \$156.906,00 - \$47.403,40 = \$109.502,60$$

▶ Exemplo 8.2

No Exemplo 8.1, supondo agora um período de carência de três meses em que serão pagos os juros devidos, construir a planilha de amortização considerando prestações antecipadas.

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$200.000,00	—	—	
1	\$200.000,00	—	\$20.000,00	\$20.000,00
2	\$200.000,00	—	\$20.000,00	\$20.000,00
3	\$156.906,60	\$43.094,00	\$20.000,00	\$63.094,00
4	\$109.502,60	\$47.403,40	\$15.690,00	\$63.094,00
5	\$57.358,86	\$52.143,74	\$10.950,26	\$63.094,00
6	—	\$57.358,86	\$5.735,89	\$63.094,00

O procedimento seguido é igual ao do exemplo anterior, com a diferença de que nos meses do período de carência a dívida não é amortizada, mas os juros devidos sobre o saldo devedor são pagos. Como as prestações são antecipadas, a primeira é paga logo ao término da carência.

▶ Exemplo 8.3

No Exemplo 8.1, supondo agora um período de carência de três meses em que os juros são capitalizados e incorporados ao principal, construir a planilha de amortização considerando prestações antecipadas.

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$200.000,00	—	—	—
1	\$220.000,00	—	—	—
2	\$242.000,00	—	—	—
3	\$189.856,18	\$52.143,82	\$24.200,00	\$76.343,82
4	\$132.497,98	\$57.358,20	\$18.985,62	\$76.343,82
5	\$69.403,96	\$63.094,02	\$13.249,80	\$76.343,82
6	—	\$69.403,96	\$6.940,40	\$76.343,82

Durante o período de carência, os juros são capitalizados e incorporados ao principal. Conseqüentemente, o cálculo das prestações antecipadas deve ser realizado com base no financiamento inicial capitalizado por $c - 1$ meses, onde c representa o período de carência:

$$R = \frac{P(1+i)^{c-1}}{a_{\overline{4}|10\%}} = \frac{\$200.000 \times (1,10)^2}{\left[\frac{(1,10)^4 - 1}{(1,10)^4 \times 0,10} \right]} = \frac{\$242.000}{3,16987} = \$76.343,82$$

► Exemplo 8.4

Um empréstimo de \$200.000 será pago em três prestações mensais iguais e consecutivas. Considerando uma taxa de juros nominal de 180% a.a., com capitalização mensal, construir a tabela de amortização. Qual será o total dos juros pagos nos três meses?

- Taxa de juros efetiva mensal:

Sendo os juros de acordo com a Tabela Price, isso implica que a taxa de juros por período, nesse caso, mês, seja a taxa efetiva ao mês calculada a partir da taxa nominal. Portanto:

$$(1 + i_m) = \left(1 + \frac{1,8}{12} \right) \Rightarrow i_m = 0,15 = 15\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo das prestações:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{3}|15\%}} = \frac{\$200.000}{2,28323} = \$87.595,21$$

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$200.000,00	—	—	—
1	\$142.404,79	\$57.595,21	\$30.000,00	\$87.595,21
2	\$76.170,30	\$66.234,49	\$21.360,72	\$87.595,21
3	—	\$76.170,30	\$11.425,55	\$87.595,21

Juros totais: \$62.786,27

► Exemplo 8.5

Montar a planilha de amortização de um empréstimo com as seguintes características: valor do empréstimo de \$1.000.000; reembolso pela Tabela Price em cinco prestações trimestrais antecipadas com carência de três trimestres; juros nominais de 28% a.a., capitalizados trimestralmente; e juros capitalizados e incorporados ao principal durante o período de carência.

- Taxa de juros efetiva trimestral:

$$(1 + i_t) = \left(1 + \frac{0,28}{4} \right) \Rightarrow i_t = 0,07 = 7\% \text{ a.t.}$$

- Prestação trimestral:

Durante o período de carência, os juros são capitalizados e incorporados ao principal.

Logo, as prestações antecipadas devem ser calculadas com base no financiamento efetivo capitalizado por $c - 1$ meses, onde c representa o período de carência:

$$R = \frac{P(1 + i)^{c-1}}{a_{\overline{5}|7\%}} = \frac{\$1.000.000 \times (1,07)^2}{\left[\frac{(1,07)^5 - 1}{(1,07)^5 \times 0,07} \right]} = \frac{\$1.144.900}{4,10020} = \$279.230,28$$

Trimestre (t)	Saldo devedor (SD _t = SD _{t-1} - A _t)	Amortização (A _t = R _t - J _t)	Juros (J _t = i × SD _{t-1})	Prestação (R _t)
0	\$1.000.000,00	—	—	—
1	\$1.070.000,00	—	\$70.000,00	
2	\$1.144.900,00	—	\$74.900,00	
3	\$945.812,72	\$199.087,28	\$80.143,00	\$279.230,28
4	\$732.789,33	\$213.023,39	\$66.206,89	\$279.230,28
5	\$504.854,30	\$227.935,03	\$51.295,25	\$279.230,28
6	\$260.963,82	\$243.890,48	\$35.339,80	\$279.230,28
7	—	\$260.963,82	\$18.267,47	\$279.230,28

► **Exemplo 8.6**

Para comprar um apartamento, você faz um empréstimo bancário de \$40.000 a ser pago em 60 meses, a uma taxa nominal de 15% a.a., capitalizada mensalmente. Calcule o valor das prestações, dos juros e do total amortizado no primeiro, segundo e terceiro anos, separadamente. Use a calculadora HP 12c.

Pela HP 12c:	Visor:
Limpe as memórias: (f) (REG)	0,00
Insira o empréstimo: 40.000 (PV)	40.000,00
Insira o número de meses: 60 (n)	60,00
Insira a taxa de juros: 15 (g) (12÷)	1,25
Calcule as prestações: (PMT)	-951,60
Calcule os juros no primeiro ano: 12 (f) (AMORT)	-5.611,46
Calcule o total amortizado no primeiro ano: (x y)	-5.807,70

Pressionando as teclas **(f)(AMORT)**, obtemos o total dos juros pagos no período introduzido imediatamente antes. Note que o período tem de ser expresso na mesma unidade da taxa (nesse caso, mês). Quando pressionada após o cálculo dos juros, a tecla **(x y)** mostra o principal já amortizado.

Para calcular os juros e o principal amortizado referente ao ano, adotaremos o seguinte procedimento:

	Visor:
Calcule os juros do segundo ano: 12 (f) (AMORT)	-4.677,85
Calcule o total amortizado no segundo ano: (x y)	-6.741,32

Precisamos introduzir novamente 12 para a calculadora entender que queremos os juros dos próximos 12 meses. Veja que, se somarmos o valor dos juros com a amortização do segundo ano, teremos \$11.419,17, que, dividido por 12 meses, dará \$951,60. Essa foi a

prestação calculada anteriormente. O mesmo acontece se somarmos os juros e as amortizações do primeiro ano, o que demonstra que nesse sistema as prestações são iguais, mas a relação de juros é diferente.

Calcularemos a seguir os juros e o principal referente ao terceiro ano:

	Visor:
Calcule os juros do terceiro ano: 12 (f) (AMORT)	-3.594,15
Calcule o total amortizado no terceiro ano: (x y)	-7.825,50

Caso você queira saber quanto falta ainda para ser amortizado:

(RCL) (PV)	19.625,93
------------	-----------

ou, se preferir: $\$40.000,00 - \$5.807,70 - \$6.741,32 - \$7.825,05 = \$19.625,93$

► Exemplo 8.7

Uma pessoa comprou um carro de \$23.000, comprometendo-se a pagar 24 prestações mensais de \$1.170,60 cada. Logo após ter quitado a décima prestação, a pessoa propõe encurtar o prazo do financiamento. Para tanto, deve pagar \$10.000 à vista e o saldo em quatro prestações mensais iguais calculadas à mesma taxa de juros do financiamento inicial. Ela quer saber: qual é a taxa de juros do financiamento, quanto falta pagar ainda do principal logo após o pagamento da décima prestação, o valor de cada uma das quatro prestações finais e o total de juros e amortização pagos nessas quatro prestações.

Pela HP 12c:	Visor:
Limpe as memórias: (f) (REG)	0,00
Insira o empréstimo: 23.000 (PV)	23.000,00
Insira o número de meses: 24 (n)	24,00
Insira as prestações: 1.170,60 (CHS) (PMT)	-1.170,00
Calcule a taxa de juros: (i)	1,67
Calcule os juros nos dez meses: 10(f) (AMORT)	-3.215,82
Calcule o total amortizado no primeiro ano: (x y)	-8.490,18
Calcule quanto ainda falta pagar: (RCL) (PV)	14.509,82

Descontando os \$10.000 e introduzindo o restante como novo principal:

10.000 (-) (PV)	Visor:
	4.509,82

Cálculo do valor das novas prestações, considerando que o saldo restante será pago em quatro vezes:

4 (n) (PMT)	Visor:
	-1.174,82

Total de juros das últimas quatro prestações:

	Visor:
4 (n) (AMORT)	-189,46

Total amortizado nas quatro últimas prestações:

	Visor:
(x y)	-4.509,82

8.1.2 Sistema de Amortizações Constantes (SAC)

Pelo Sistema de Amortizações Constantes (SAC), o principal é reembolsado em cotas de amortização iguais. Dessa maneira, diferentemente da Tabela Price, em que as prestações são iguais, no Sistema SAC as prestações são decrescentes, já que os juros diminuem a cada prestação. A amortização é calculada dividindo-se o valor do principal pelo número de períodos de pagamento.

Esse tipo de sistema às vezes é usado pelos bancos comerciais em seus financiamentos imobiliários e também, em certos casos, em empréstimos a empresas privadas, por meio de entidades governamentais.

► Exemplo 8.8

Elaborar a planilha de amortização para o seguinte financiamento:

- Valor do financiamento de \$200.000.
- Reembolso em quatro meses pelo Sistema SAC.
- Taxa de juros efetiva: 10% a.m.

Cálculo das amortizações:

$$A_t = \frac{\text{Financiamento}}{n} = \frac{\$200.000}{4} = \$50.000$$

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)
0	\$200.000	—	—	—
1	\$150.000	\$50.000	\$20.000	\$70.000
2	\$100.000	\$50.000	\$15.000	\$65.000
3	\$50.000	\$50.000	\$10.000	\$60.000
4	—	\$50.000	\$5.000	\$55.000

► Exemplo 8.9

Um empréstimo de \$200.000, contratado a juros efetivos de 10% a.m., será pago em três prestações mensais antecipadas com carência de três meses. Construir a planilha de amortização. Durante a carência, os juros são capitalizados e incorporados ao principal. Logo, a amortização correspondente às prestações antecipadas deve ser calculada com base no financiamento capitalizado por dois meses ($c - 1$ meses, onde $c = 3$):

$$A_t = \frac{P \times (1 + i)^{c-1}}{3} = \frac{\$200.000 \times (1,10)^{3-1}}{3} = \$80.666,67$$

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)
0	\$200.000,00	—	—	—
1	\$220.000,00	—	\$20.000,00	—
2	\$242.000,00	—	\$22.000,00	—
3	\$161.333,33	\$80.666,67	\$24.200,00	\$104.866,67
4	\$80.666,67	\$80.666,67	\$16.133,33	\$96.800,00
5	—	\$80.666,67	\$8.066,67	\$88.733,33

8.1.3 Sistema de Amortizações Misto (SAM)

O Sistema de Amortizações Misto (SAM) se baseia no SAC e no Sistema Price, já que a prestação é igual à média aritmética calculada entre as prestações desses dois sistemas, nas mesmas condições de juros e prazos.

Uma das desvantagens do SAM é que suas prestações iniciais são ligeiramente mais altas que as do Price. Contudo, após a metade do período, o mutuário sentirá uma queda substancial no comprometimento de sua renda com o pagamento das prestações.

No Sistema Misto, as prestações decrescem de acordo com determinada progressão aritmética e podem ser calculadas usando-se as seguintes expressões:

- Valor da primeira prestação:

$$R_1 = \frac{P(1 - q)}{a_{\overline{n}|i\%}} + q \left(\frac{1}{n} + i \right) P$$

- Valor da razão da progressão aritmética (corresponde ao decréscimo das prestações):

$$r = q \times \frac{i \times P}{n}$$

- Valor das prestações no período t ($t > 1$):

$$R_{t+1} = R_t - r$$

onde: P = valor do principal;

R_1 = valor da primeira prestação;

q = coeficiente variável por tipo de plano;

r = razão da progressão (correspondente ao decréscimo do valor das prestações sucessivas).

Dependendo do valor de q, o sistema de reembolso pode resultar no Sistema Price (para $q = 0$) ou no Sistema SAC (no caso de $q = 1$). O denominado Sistema Misto é um caso particular em que $q = 0,5$. Nesse sistema, devido à ponderação 0,5, o valor das prestações, amortizações, juros e saldos devedores corresponde à média aritmética dos valores dos Sistemas Price e SAC.

↑ Exemplo de aplicação

► Exemplo 8.10

Calcular as prestações de um empréstimo de \$200.000 a ser pago em quatro prestações mensais a juros efetivos de 10% a.m., fazendo a variável q assumir os valores 0 (Sistema Price), 0,5 (Sistema SAM) e 1 (Sistema SAC). Apresentar também a planilha completa do Sistema SAM.

- Cálculo da primeira prestação e da razão de decréscimo:

a) Para $q = 0$ (Sistema Price):

Primeira prestação:

$$R_1 = \frac{P(1 - q)}{a_{\overline{n}|i\%}} + q\left(\frac{1}{n} + i\right)P = \frac{\$200.000}{a_{\overline{4}|10\%}} = \frac{\$200.000}{3,16987} = \$63.094$$

Razão de decréscimo das prestações:

$$r = q \frac{i \times P}{n} = 0 \Rightarrow \text{as prestações são constantes}$$

b) Para $q = 0,5$ (Sistema Misto):

Primeira prestação:

$$R_1 = \frac{\$200.000 \times (1 - 0,5)}{a_{\overline{4}|10\%}} + 0,5 \times \left(\frac{1}{4} + 0,10\right) \times \$200.000 = \$66.547$$

Razão de decréscimo das prestações:

$$r = 0,5 \times \frac{0,10 \times \$200.000}{4} = \$2.500 \Rightarrow \text{as prestações diminuem em } \$2.500 \text{ ao mês}$$

c) Para $q = 1,0$ (Sistema SAC)

Primeira prestação:

$$R_1 = \frac{\$200.000 \times (1 - 1)}{a_{\overline{4}|10\%}} + 1,0 \times \left(\frac{1}{4} + 0,10\right) \times \$200.000 = \$70.000$$

Razão de decréscimo das prestações:

$$r = 1,0 \times \frac{0,10 \times \$200.000}{4} = \$5.000 \Rightarrow \text{as prestações diminuem em } \$5.000 \text{ ao mês}$$

- Valor das prestações para $q = 0; 0,5; 1,0$:

Mês	Sistema Price $q = 0; r = 0$	Sistema SAM $q = 0,5; r = 2.500$	Sistema SAC $q = 1,0; r = 5.000$
1	\$63.094	\$66.547	\$70.000
2	\$63.094	\$64.047	\$65.000
3	\$63.094	\$61.547	\$60.000
4	\$63.094	(*)\$59.047	(*)\$55.000

(*) Observe que as prestações decrescem na razão r respectiva.

No quadro anterior, para $q = 0$, as prestações correspondem às do Sistema Price (veja o Exemplo 8.1); para $q = 1,0$, correspondem às do Sistema SAC (veja o Exemplo 8.8); e, para $q = 0,5$, correspondem às do Sistema Misto.

A planilha no Sistema Misto é mostrada a seguir:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$200.000,00	—	—	—
1	\$153.453,00	\$46.547,00	\$20.000,00	\$66.547,00
2	\$104.751,30	\$48.701,70	\$15.345,30	\$64.047,00
3	\$53.679,43	\$51.071,87	\$10.475,13	\$61.547,00
4	—	\$53.679,43	\$5.367,94	\$59.047,00

Atente ao fato de que essa planilha é simplesmente uma média aritmética das planilhas dos Sistemas SAC e Price (planilhas dos exemplos 8.1 e 8.8).

O seguinte quadro apresenta, para efeitos comparativos, os esquemas de reembolso pelos Sistemas Price e Misto para um financiamento de \$2.000 amortizado em 24 meses a juros efetivos de 1% a.m.:

Mês	Sistema Price				Sistema SAM			
	Saldo devedor	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	\$2.000,00				\$2.000,00			
1	\$1.925,85	\$20,00	\$74,15	\$94,15	\$1.921,26	\$20,00	\$78,74	\$98,74
2	\$1.850,96	\$19,26	\$74,89	\$94,15	\$1.842,15	\$19,21	\$79,11	\$98,32
3	\$1.775,33	\$18,51	\$75,64	\$94,15	\$1.762,66	\$18,42	\$79,49	\$97,91
4	\$1.698,93	\$17,75	\$76,39	\$94,15	\$1.682,80	\$17,63	\$79,86	\$97,49
5	\$1.621,78	\$16,99	\$77,16	\$94,15	\$1.602,55	\$16,83	\$80,25	\$97,07
6	\$1.543,85	\$16,22	\$77,93	\$94,15	\$1.521,92	\$16,03	\$80,63	\$96,66
7	\$1.465,14	\$15,44	\$78,71	\$94,15	\$1.440,90	\$15,22	\$81,02	\$96,24
8	\$1.385,64	\$14,65	\$79,50	\$94,15	\$1.359,49	\$14,41	\$81,41	\$95,82
9	\$1.305,35	\$13,86	\$80,29	\$94,15	\$1.277,68	\$13,59	\$81,81	\$95,41
10	\$1.224,26	\$13,05	\$81,09	\$94,15	\$1.195,46	\$12,78	\$82,21	\$94,99
11	\$1.142,35	\$12,24	\$81,90	\$94,15	\$1.112,84	\$11,95	\$82,62	\$94,57
12	\$1.059,63	\$11,42	\$82,72	\$94,15	\$1.029,82	\$11,13	\$83,03	\$94,16
13	\$976,08	\$10,60	\$83,55	\$94,15	\$946,37	\$10,30	\$83,44	\$93,74
14	\$891,69	\$9,76	\$84,39	\$94,15	\$862,51	\$9,46	\$83,86	\$93,32
15	\$806,46	\$8,92	\$85,23	\$94,15	\$778,23	\$8,63	\$84,28	\$92,91
16	\$720,38	\$8,06	\$86,08	\$94,15	\$693,52	\$7,78	\$84,71	\$92,49
17	\$633,44	\$7,20	\$86,94	\$94,15	\$608,39	\$6,94	\$85,14	\$92,07
18	\$545,63	\$6,33	\$87,81	\$94,15	\$522,81	\$6,08	\$85,57	\$91,66
19	\$456,94	\$5,46	\$88,69	\$94,15	\$436,80	\$5,23	\$86,01	\$91,24
20	\$367,36	\$4,57	\$89,58	\$94,15	\$350,35	\$4,37	\$86,46	\$90,82
21	\$276,88	\$3,67	\$90,47	\$94,15	\$263,44	\$3,50	\$86,90	\$90,41
22	\$185,51	\$2,77	\$91,38	\$94,15	\$176,09	\$2,63	\$87,36	\$89,99
23	\$93,21	\$1,86	\$92,29	\$94,15	\$88,27	\$1,76	\$87,81	\$89,57
24	\$0,00	\$0,93	\$93,21	\$94,15	\$0,00	\$0,88	\$88,27	\$89,16

Observe que, no Sistema SAM, até a metade do período de financiamento, as amortizações são maiores que as do Sistema Price. Como já foi dito, isso resulta em uma queda

mais acentuada do saldo devedor do que ocorre no Sistema Price, diminuindo as chances de resíduo ao fim do contrato. Assim, embora as prestações iniciais sejam ligeiramente mais altas, depois da metade do período passam a ser menores, comprometendo uma parcela menor da renda do mutuário.

8.1.4 Sistema de Amortização Americano

No esquema de amortização americano, o principal é restituído por meio de uma parcela única ao fim da operação. Os juros podem ser pagos periodicamente (mais comum) ou capitalizados e pagos juntamente com o principal no fim do prazo acertado.

Podem ser abertos um fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*), no qual o devedor deposita periodicamente as cotas de amortização. Essas cotas, por sua vez, devem render juros de tal modo que, na data de pagamento do principal, o saldo desse fundo de amortização seja igual ao capital a pagar, liquidando dessa forma o empréstimo.

Exemplo de aplicação

Exemplo 8.11

Nos três casos seguintes, elaborar a planilha de amortização de um empréstimo que será reembolsado de acordo com o Sistema de Amortização Americano: a) os juros são pagos periodicamente e não é aberto o fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*); b) os juros são capitalizados e pagos no fim da operação, juntamente com o principal, e é aberto o *sinking fund*; c) pagamento periódico dos juros e criação de *sinking fund*.

Dados: Valor da operação = \$200.000; taxa de juros contratada no financiamento (i) = 10% a.m.; prazo da operação = 3 meses; taxa de juros obtida pelo fundo de amortização (i_s) = 8% a.m.

a) Juros pagos periodicamente:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)
0	\$200.000	—	—	—
1	\$200.000	—	\$20.000	\$20.000
2	\$200.000	—	\$20.000	\$20.000
3	—	\$200.000	\$20.000	\$220.000

b) Juros capitalizados e pagos no fim da operação:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)
0	\$200.000	—	—	—
1	\$220.000	—	—	—
2	\$242.000	—	—	—
3	—	\$200.000	\$66.200(*)	\$266.200

(*) $\$200.000 \times (1,10)^3 - \$200.000 = \$66.200$

c) Com a criação do fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*):

Mês (t)	Juros pagos (J = i × P)	Cota do fundo de amortização (QFA)	Desencaixe total (D = J + QFA)	Saldo devedor do empréstimo	Valor do <i>sinking fund</i>
0	—	—	—	—	—
1	\$20.000	\$61.606,70	\$81.606,70	\$200.000	—
2	\$20.000	\$61.606,70	\$81.606,70	\$200.000	—
3	\$20.000	\$61.606,70	\$81.606,70	\$200.000	\$200.000(*)

(*) $\$61.606,7 \times s_{\overline{3}|8\%}$

• Cálculo da cota do fundo de amortização do empréstimo (QFA):

Ao fim da operação, o valor do fundo de amortização (*sinking fund*) deve ser igual ao valor do empréstimo concedido, de modo que este possa ser liquidado. Logo, trata-se de calcular, a juros efetivos (i_e) de 8% a.m., o valor da cota do fundo de amortização (QFA), de modo que ele acumule, ao término do prazo da operação, um montante igual ao valor do empréstimo. Assim, o valor da cota será:

$$QFA = \frac{S}{s_{\overline{n}|i\%}} = \frac{\$200.000}{s_{\overline{3}|8\%}} = \frac{\$200.000}{\left[\frac{(1,08)^3 - 1}{0,08} \right]} = \$61.606,70$$

As cotas do fundo de amortização do empréstimo mais os rendimentos que elas geram constituem o fundo de amortização que, ao final da operação, deve ter um valor igual ao valor do empréstimo. Pode-se observar nas duas últimas colunas da planilha que, no fim da operação, o saldo devedor do empréstimo é igual ao valor do fundo de amortização. Consequentemente, o valor do fundo liquidará o empréstimo.

• Juros periódicos pagos:

Os juros são constantes e pagos periodicamente, calculados sobre o principal inicial à taxa de juros contratada:

$$J = i \times P = 0,10 \times \$200.000 = \$20.000$$

• Desencaixe periódico:

O mutuário está obrigado, periodicamente, a pagar o juro (J) e depositar a cota do fundo de amortização (QFA). Logo, o desencaixe periódico total é o seguinte:

$$D = J + QFA = \$20.000 + \$61.606,70 = \$81.606,70$$

8.2 Custo efetivo (taxa interna de retorno) de planos de amortização

Normalmente, sobre os financiamentos incide uma série de custos adicionais, tais como o IOF, comissões, aval etc. Devido a esses encargos, o custo do financiamento é maior que a taxa contratada, tornando-se indispensável sua inclusão na planilha de amortização para o posterior cálculo do custo efetivo do empréstimo (taxa interna de retorno). Consideremos o seguinte exemplo ilustrativo:

↑ **Exemplos de aplicação** →▶ **Exemplo 8.12** ↓

Uma empresa tomou um financiamento de \$2.000 sob as seguintes condições: taxa de juros efetiva de 10% a.m.; reembolso do principal em quatro meses pelo Sistema Price; encargos de 2% sobre o valor das prestações. Pede-se montar a planilha de amortização e fluxo de caixa e calcular o custo efetivo do financiamento.

- Planilha de amortização e fluxo de caixa:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)	Encargos	Fluxo de caixa
0	\$2.000,00					\$2.000,00
1	\$1.569,06	\$430,94	\$200,00	\$630,94	\$12,62	(\$643,56)
2	\$1.095,03	\$474,05	\$156,91	\$630,94	\$12,62	(\$643,56)
3	\$573,59	\$521,44	\$109,50	\$630,94	\$12,62	(\$643,56)
4	\$00,00	\$573,59	\$57,36	\$630,94	\$12,62	(\$643,56)

O custo efetivo do financiamento é a taxa interna de retorno (TIR) do fluxo de caixa, ou seja, é a taxa que iguala a zero a seguinte expressão:

$$VPL = \$2.000 - \frac{\$643,56}{(1 + TIR)} - \frac{\$643,56}{(1 + TIR)^2} - \frac{\$643,56}{(1 + TIR)^3} - \frac{\$643,56}{(1 + TIR)^4} = 0$$

Para estimar manualmente o valor da TIR, podemos começar calculando o VPL para diversas taxas de juros até conseguir mudança no sinal do VPL e, a seguir, efetuar uma interpolação linear:

Taxa de juros	VPL
9%	-\$84,95412
10%	-\$39,99861
11%	+\$3,39005

$$TIR = 10\% + \left[\frac{-39,99861}{-39,99861 - (+3,39005)} \right] \times (11\% - 10\%) = 10,92\%$$

Calculadora HP 12c:	
(f) (FIN)	
643,56 (CHS) (PMT)	
4 (n) 2000 (PV)	
(i) → 10,92%	

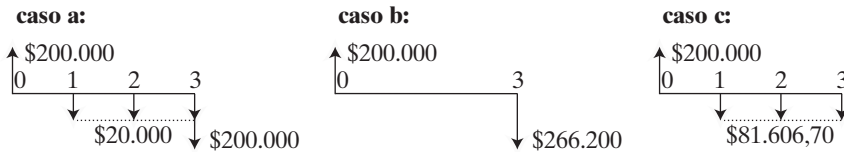
apaga a memória financeira
valor dos pagamentos mensais com sinal negativo
número de pagamentos e valor do financiamento
calcula a taxa de juros

▶ **Exemplo 8.13** ↓

Com os valores obtidos no Exemplo 8.11, calcular e comparar o custo efetivo do financiamento a ser reembolsado pelo Sistema de Amortização Americano, nos três seguintes

casos: a) os juros são pagos periodicamente; b) os juros são capitalizados e pagos no fim da operação juntamente com o principal; c) pagamento periódico dos juros e constituição do fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*).

Com os valores previamente calculados no Exemplo 8.11, podemos representar os fluxos de caixa dos três casos:



Cálculo da TIR:

$$\text{Caso a: } \$200.000 - \frac{\$20.000}{(1+i)} - \frac{\$20.000}{(1+i)^2} - \frac{\$220.000}{(1+i)^3} = 0 \Rightarrow i = 10\% \text{ a.m.}$$

$$\text{Caso b: } \$200.000 - \frac{\$266.200}{(1+i)^3} = 0 \Rightarrow i = 10\% \text{ a.m.}$$

$$\text{Caso c: } \$200.000 - \frac{\$81.606,70}{(1+i)} - \frac{\$81.606,70}{(1+i)^2} - \frac{\$81.606,70}{(1+i)^3} = 0 \Rightarrow i = 10,83\% \text{ a.m.}$$

caso a

Calculadora HP 12c:
(f) (FIN) 20.000 (CHS) (PMT)
3 (n) 200.000 (PV)
200.000 (CHS) (FV)
(i) → 10,00

caso b

Calculadora HP 12c:
(f) (FIN)
3 (n) 200.000 (PV)
266.200 (CHS) (FV)
(i) → 10,00

caso c

Calculadora HP 12c:
(f) (FIN)
81.606,70 (CHS) (PMT)
3 (n) 200.000 (PV)
(i) → 10,83

8.3 Sistemas de financiamento habitacional

Para financiamento da casa própria, o sistema de financiamento habitacional usa o Sistema Price e o Sistema SAC. Nos dois sistemas, o saldo devedor é corrigido mês a mês pela TR (taxa referencial de juros), e a cada período de 12 meses é feito o recálculo da prestação (a partir do terceiro ano ele pode passar a ser feito trimestralmente), com base no saldo devedor e no período restante. Os sistemas têm sido usados com atualização mensal pela TR acoplada a uma taxa de juros nominal não superior a 12% a.a.

Como ilustração, o quadro a seguir apresenta, apenas para os primeiros 18 meses, os valores nos Sistemas Price e SAC tal como computados pelo sistema de financiamento habitacional para um financiamento de \$50.000 à taxa nominal de 10,5% a.a., capitalizada mensalmente, variação da TR de 0,6% a.m. e prazo de 15 anos:

Mês	Sistema SAC				Tabela Price			
	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	\$50.000,00				\$50.000,00			
1	\$50.024,86	\$275,15	\$440,13	\$715,27	\$50.187,44	\$112,57	\$440,13	\$552,69
2	\$50.050,08	\$274,93	\$440,34	\$715,27	\$50.377,64	\$110,92	\$441,77	\$552,69
3	\$50.075,67	\$274,70	\$440,57	\$715,27	\$50.570,67	\$109,24	\$443,45	\$552,69
4	\$50.101,65	\$274,48	\$440,79	\$715,27	\$50.766,55	\$107,54	\$445,15	\$552,69
5	\$50.128,01	\$274,25	\$441,02	\$715,27	\$50.965,33	\$105,82	\$446,87	\$552,69
6	\$50.154,76	\$274,02	\$441,25	\$715,27	\$51.167,06	\$104,07	\$448,62	\$552,69
7	\$50.181,90	\$273,78	\$441,49	\$715,27	\$51.371,77	\$102,29	\$450,40	\$552,69
8	\$50.209,45	\$273,54	\$441,73	\$715,27	\$51.579,51	\$100,49	\$452,20	\$552,69
9	\$50.237,41	\$273,30	\$441,97	\$715,27	\$51.790,32	\$98,66	\$454,03	\$552,69
10	\$50.265,78	\$273,06	\$442,21	\$715,27	\$52.004,26	\$96,81	\$455,88	\$552,69
11	\$50.294,57	\$272,81	\$442,46	\$715,27	\$52.221,36	\$94,92	\$457,77	\$552,69
12	\$50.323,78	\$272,55	\$442,72	\$715,27	\$52.441,68	\$93,01	\$459,68	\$552,69
13	\$50.328,82	\$296,90	\$442,98	\$739,88	\$52.620,94	\$135,39	\$461,62	\$597,01
14	\$50.333,93	\$296,86	\$443,02	\$739,88	\$52.802,85	\$133,81	\$463,20	\$597,01
15	\$50.339,12	\$296,82	\$443,06	\$739,88	\$52.987,45	\$132,21	\$464,80	\$597,01
16	\$50.344,38	\$296,77	\$443,11	\$739,88	\$53.174,79	\$130,59	\$466,42	\$597,01
17	\$50.349,73	\$296,72	\$443,16	\$739,88	\$53.364,90	\$128,94	\$468,07	\$597,01
18	\$50.355,15	\$296,68	\$443,20	\$739,88	\$53.557,83	\$127,27	\$469,74	\$597,01

Considerando j a taxa de juros nominal anual, no caso da Tabela Price a prestação para cada mês do ano k é dada por:

$$R_k = \frac{SD_{k-1}}{a_{\overline{12n}|i_m}} = \frac{SD_{k-1}}{\left[\frac{(1+j/12)^{12 \times n} - 1}{(1+j/12)^{12 \times n} \times (j/12)} \right]} \quad \text{para } k \text{ variando de } 1 \text{ ao término do prazo}$$

onde i_m = taxa de juros efetiva por período de capitalização = $j/12$

SD_{k-1} = saldo devedor no fim do ano imediatamente anterior ao ano k

n = número de anos restantes ao término do prazo.

j = taxa nominal anual capitalizada mensalmente

Cálculo das prestações para os dois primeiros anos:

- Para o primeiro ano: $R_1 = \frac{\$50.000}{\left[\frac{(1+0,105/12)^{12 \times 15} - 1}{(1+0,105/12)^{12 \times 15} \times (0,105/12)} \right]} = \$552,69$

para $k = 1$ e $n = 15$

- Para o segundo ano: $R_2 = \frac{\$52.441,68}{\left[\frac{(1+0,105/12)^{12 \times 14} - 1}{(1+0,105/12)^{12 \times 14} \times (0,105/12)} \right]} = \$597,01$

para $k = 2$ e $n = 14$

A cada ano, esse cálculo é feito levando-se em conta o novo saldo devedor e o tempo restante. No primeiro ano, SD_{k-1} é igual ao valor do financiamento tomado e, nos anos posteriores, será igual ao saldo devedor do fim do ano imediatamente anterior; n é o número de anos restantes até o término do prazo. Pelas regras do sistema, o cálculo da prestação é feito anualmente.

Os juros correspondentes a cada mês t são calculados sobre o saldo devedor do mês anterior (SD_{t-1}) atualizado pelo valor da TR:

$$\text{Juros}_t = (j/12) \times [SD_{t-1} \times (1 + TR)]$$

A amortização do mês t é a diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros do mês:

$$A_t = R_t - \text{juros}_t$$

O valor do novo saldo devedor (SD_t) imediatamente depois de ter sido paga a prestação é igual ao saldo devedor do mês anterior (SD_{t-1}), atualizado pelo valor da TR, menos o valor da amortização do mês:

$$SD_t = SD_{t-1} \times (1 + TR) - A_t$$

No caso do Sistema SAC, de acordo com a metodologia usada pelo sistema, a prestação para cada mês do ano k é dada por:

$$R_k = \left[\frac{\frac{SD_{k-1}}{n} + j \times SD_{k-1}}{12} \right] \quad \text{para } k \text{ variando de 1 ao término do prazo}$$

Cálculo das prestações dos dois primeiros anos:

- Para o primeiro ano: $R_1 = \left[\frac{\frac{\$50.000}{15} + 0,105 \times \$50.000}{12} \right] = \$715,27$ para $k = 1$

- Para o segundo ano: $R_2 = \left[\frac{\frac{\$50.323,78}{14} + 0,105 \times \$50.323,78}{12} \right] = \$739,88$ para $k = 2$

O cálculo do resto da planilha segue o procedimento descrito para os dois primeiros anos. No Sistema SAC, no primeiro ano, o valor das prestações não pode comprometer mais que 30% da renda líquida mensal do mutuário. No Sistema Price, esse comprometimento é de, no máximo, 25%. No Sistema SAC, a partir de determinado período de recálculo, o valor das prestações começa a diminuir, enquanto no Sistema Price aumenta sempre.

No quadro a seguir mostra-se o valor das prestações e o saldo devedor no Sistema SAC e no Price, para os 15 anos do prazo do financiamento:

Ano	Sistema SAC		Tabela Price	
	Saldo devedor	Prestação	Saldo devedor	Prestação
1	\$50.323,68	\$715,28	\$52.441,56	\$552,70
2	\$50.389,31	\$739,88	\$54.776,66	\$597,01
3	\$50.154,48	\$763,91	\$56.936,97	\$645,00
4	\$49.571,72	\$787,15	\$58.836,55	\$696,99
5	\$48.588,06	\$809,30	\$60.367,95	\$753,37
6	\$47.144,41	\$830,05	\$61.397,35	\$814,57
7	\$45.175,01	\$849,04	\$61.758,58	\$881,10
8	\$42.606,76	\$865,85	\$61.245,69	\$953,55
9	\$39.358,57	\$880,03	\$59.603,60	\$1032,64
10	\$35.340,73	\$891,03	\$56.516,09	\$1119,29
11	\$30.454,21	\$898,24	\$51.589,72	\$1214,75
12	\$24.590,34	\$900,94	\$44.330,99	\$1320,87
13	\$17.631,00	\$898,23	\$34.109,42	\$1440,87
14	\$9.451,29	\$888,90	\$20.080,13	\$1581,86
15	\$(63,54)	\$870,31	\$894,25	\$1770,04

Aos valores das prestações calculados nas planilhas, muitas vezes é acrescentada uma taxa administrativa e uma taxa referente a seguros (seguro MIP e seguro DFI).

Exercícios propostos

1. Uma indústria tomou emprestados \$2.000.000, concordando em saldar o débito em oito pagamentos anuais postecipados a juros efetivos de 36% a.a. pela Tabela Price. Calcular: a) a prestação anual; b) o saldo devedor logo após o sexto pagamento; c) a amortização do quarto ano.
2. Uma dívida de \$1.500.000 contratada a juros nominais de 36% a.a., capitalizados trimestralmente, será amortizada pela Tabela Price em oito anos por meio de pagamentos trimestrais. Determinar: a) o saldo devedor ao fim do 3^o ano; b) o saldo devedor ao término do 14^o trimestre; c) a distribuição do 20^o pagamento em juros e amortização da dívida; d) o total de juros pagos no período.
3. Um financiamento de \$100.000 será pago pela Tabela Price em oito parcelas mensais a juros nominais de 72% a.a. com capitalização mensal. Calcular os juros embutidos na sexta prestação.
4. Um financiamento de \$2.000.000 será pago pela Tabela Price em 18 parcelas mensais a juros efetivos de 10% a.m. Calcular: a) o valor da prestação; b) a soma das amortizações dos três primeiros meses; c) a amortização introduzida pela 13^a prestação.
5. Um empréstimo de \$2.000.000 será saldado pela Tabela Price em dez parcelas semestrais a juros efetivos de 9% a.s. Calcular o valor do saldo devedor do empréstimo logo após a terceira prestação.
6. Um financiamento de \$10.000 será pago pela Tabela Price em cinco parcelas mensais a juros nominais de 120% a.a., capitalizados mensalmente. Calcular: a) a amortização do quarto mês; b) a soma dos juros pagos no segundo e terceiro meses; c) o saldo devedor logo após o pagamento da terceira prestação.
7. Um financiamento de \$500.000 será pago pela Tabela Price em cinco parcelas mensais a juros efetivos de 4% a.m. Calcular: a) a amortização do quarto mês; b) a soma dos juros pagos no segundo e terceiro meses; c) o saldo devedor logo após o pagamento da terceira prestação.

8. Um financiamento de \$500.000 será pago pelo Sistema SAC em cinco parcelas mensais a juros efetivos de 4% a.m. Calcular: a) a amortização do quarto mês; b) a soma dos juros pagos no segundo e terceiro meses; c) o saldo devedor logo após o pagamento da terceira prestação.
9. Um financiamento de \$500.000 será pago pelo Sistema Misto em cinco parcelas mensais a juros efetivos de 4% a.m. Calcular: a) a amortização do quarto mês; b) a soma dos juros pagos no segundo e terceiro meses; c) o saldo devedor logo após o pagamento da terceira prestação; d) o valor da prestação do quarto mês; e) a soma de todas as prestações pagas; f) a soma de todos os juros pagos.
10. Um capital de \$400.000 será pago de acordo com o Sistema de Amortização Americano, em 15 meses, a juros efetivos de 8% a.t. Os juros serão pagos periodicamente e será constituído um fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*), efetuando-se depósitos trimestrais remunerados à taxa efetiva de 6% a.t. Calcular: a) a cota trimestral do fundo de amortização do empréstimo; b) o total de juros pagos; c) o descaixe periódico; d) o valor do fundo de amortização do empréstimo no fim do quarto trimestre; e) o custo efetivo do financiamento (TIR).
11. Um empréstimo de \$400.000, contratado à taxa efetiva de 16% a.a., será pago em 12 parcelas mensais postecipadas de acordo com o Sistema de Amortização Americano. Elaborar as planilhas considerando que o fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*) terá depósitos mensais remunerados à taxa efetiva de 12% a.a. e calcular a TIR (custo efetivo do financiamento).
12. Um empréstimo de \$100.000 foi contratado a juros efetivos de 24% a.a. para ser pago em seis parcelas mensais postecipadas de acordo com o Sistema de Amortização Americano. O fundo de amortização do empréstimo terá depósitos mensais remunerados a juros efetivos de 20% a.a. Calcular: a) os juros mensais; b) as cotas do fundo de amortização; c) os descaixes; d) o saldo do fundo de amortização após o sexto descaixe; e) os juros acumulados após o sexto descaixe; f) os descaixes acumulados após o sexto mês; g) a TIR (custo efetivo do financiamento).
13. Uma empresa contratou, a juros efetivos de 5% a.m., um financiamento de \$600.000, que será amortizado por meio de seis prestações mensais postecipadas. Pede-se: a) no Sistema de Amortizações Constantes (SAC), determinar a soma dos valores das prestações dos três primeiros meses; b) na Tabela Price, calcular a soma dos valores das amortizações do primeiro e segundo meses; c) no Sistema Misto, calcular o valor da prestação do segundo mês; d) na Tabela Price, calcular a soma dos valores das seis prestações.
14. Uma empresa contratou, a juros efetivos de 5% a.m., um financiamento de \$6.000 que será amortizado por meio de seis prestações mensais postecipadas. No Sistema de Amortizações Constantes, determinar a soma dos valores das prestações dos três primeiros meses e, na Tabela Price, calcular a soma dos valores das amortizações do primeiro e segundo meses.

Cálculo financeiro em contexto inflacionário

1 2 3 4 5 6 7 8 **9** 10 11

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Índices de preços
- Taxa de juros aparente e taxa de juros real
- Taxa efetiva em moeda nacional e em moeda estrangeira

Em contextos inflacionários, deve-se ficar atento para a denominada ilusão monetária ou rendimento aparente das aplicações e dos investimentos. Nessa situação, é importante determinar a taxa real de juros e o custo ou o rendimento real de um financiamento ou de uma aplicação. No processo de cálculo da taxa real, é necessário homogeneizar os valores das séries financeiras de forma que se retirem os efeitos corrosivos da inflação sobre os valores aplicados ou recebidos em cada data. Assim, esses valores devem ser traduzidos a um mesmo padrão monetário de referência em determinada época, ou seja, é necessário ‘datar’ a moeda; dizer, por exemplo, moeda de 2004, moeda de 2005 etc.

No processo de homogeneização dos valores monetários, são utilizados índices de preços a fim de deflacionar ou inflacionar as séries de valores. Os índices de preços permitem formar deflatores, ou seja, operadores que, quando multiplicados pelos valores nominais das diversas épocas, produzem valores correspondentes ao nível de preços da data de referência. Deflacionar um fluxo monetário significa reduzir todos os valores da série a uma base comum de referência situada no início da série. Inversamente, inflacionar um fluxo monetário significa colocar todos os valores da série em uma base comum de referência situada no fim da série; isto é, inflacionar significa transformar os valores de cada época em valores compatíveis com a capacidade de compra verificada em uma data posterior.

Em contextos inflacionários, são muito usadas as expressões ‘em preços correntes’ e ‘em preços constantes’. Quando o fluxo de valores monetários está em preços correntes, significa que cada termo da série se encontra expresso em poder aquisitivo da data respectiva do termo; por outro lado, quando o fluxo está em preços constantes, todos os termos da série estão expressos em poder aquisitivo de uma única data.

9.1 Índices de preços

Um índice de preços procura medir a mudança que ocorre nos níveis de preços de um período para outro. No Brasil, a maioria dos cálculos de índices de preços está a cargo da Fundação Getulio Vargas (FGV) do Rio de Janeiro, que publica mensalmente na revista *Conjuntura Econômica* os índices nacionais e regionais. Outras instituições que elaboram índices de preços são: o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a Fundação Instituto de Pesquisa Econômica (Fipe) e o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese) em São Paulo e o Instituto de Pesquisas Econômicas, Administrativas e Contábeis (Ipead-UFMG) em Belo Horizonte.

O índice mais geral disponível é o Índice Geral de Preços — Disponibilidade Interna da FGV (IGP-DI). Ele é indicado para inflacionar ou deflacionar valores monetários cujas causas foram devidas a muitos fatores, pois mede a inflação do país. Contudo, para comparações específicas e obtenção de taxas reais de crescimento e reajustes de valores, diversos setores, como os de construção civil e produtos agropecuários, entre outros, utilizam índices de preços específicos do próprio setor.

O processo de inflacionar ou deflacionar uma série de valores monetários para determinada data de referência deve ser interpretado como uma comparação entre a evolução dos valores monetários e o comportamento dos preços dos produtos agrupados no índice escolhido. Assim, se um investimento teve uma taxa de rendimento real de 15%, tomando-se como referência determinado índice de preços, isso significa que esse rendimento superou em 15% a evolução do índice escolhido, ou seja, a evolução média dos preços dos bens e serviços que compõem o índice.

9.2 Taxa de juros aparente e taxa de juros real

A taxa aparente (chamada nominal nas transações financeiras e comerciais) é aquela que vigora nas operações correntes. Neste capítulo, usaremos a expressão ‘taxa aparente’ para diferenciá-la da taxa nominal (taxa com mais de uma capitalização por período referencial), apresentada no Capítulo 3.

A taxa real é o rendimento ou o custo de uma operação, seja de aplicação ou de captação, calculado depois de serem expurgados os efeitos inflacionários. A taxa aparente embute determinada expectativa inflacionária.

As taxas aparente e real relacionam-se da seguinte forma:

$$(1 + i) = (1 + i_r) \times (1 + I)$$

onde: i = taxa aparente;
 i_r = taxa real;
 I = taxa de inflação.

9.3 Taxa efetiva em moeda nacional para operações em moeda estrangeira

A rentabilidade ou a perda de um depósito em moeda estrangeira estará em função da taxa de juros contratada e da desvalorização ou revalorização da moeda nacional com respeito à moeda estrangeira. Assim, o cálculo da taxa efetiva em moeda nacional de um depósito em moeda estrangeira é feito com base na taxa efetiva em moeda estrangeira e na taxa de desvalorização da moeda nacional por meio da seguinte expressão:

$$i_{MN} = (1 + i_{ME}) \times (1 + i_{td}) - 1$$

onde: i_{MN} = taxa efetiva em moeda nacional;
 i_{ME} = taxa efetiva em moeda estrangeira;
 i_{td} = taxa de desvalorização da moeda nacional.

↑ Exemplos de aplicação

► Exemplo 9.1

Determinar a taxa de rendimento real a partir de uma taxa aparente de 7% a.a. e uma inflação projetada de 3% a.a.

Dados: $i = 7\%$ a.a., $I = 3\%$ a.a., $i_r = ?$

$$i_r = \frac{(1 + i)}{(1 + I)} - 1 = \frac{1,07}{1,03} - 1 = 3,8835\% \text{ a.a.}$$

Seria incorreto afirmar que o rendimento aparente de 7% a.a. produziu um juro real de 4% a.a. (7% - 3%). O comportamento das taxas é exponencial (e não linear), em concordância com o próprio comportamento da taxa de inflação considerada.

► Exemplo 9.2

Uma aplicação financeira rende juros nominais de 6% a.a., capitalizados mensalmente. Considerando uma inflação de 5,5% a.a., calcular as taxas de juros aparente e real obtidas pela aplicação.

Dados: $j = 6\%$ a.a., $k = 12$, $I = 5,5\%$ a.a., $i_a = ?$, $i_r = ?$

a) Taxa efetiva aparente:

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k$$

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} \Rightarrow i_a = 6,17\% \text{ a.a.}$$

b) Taxa efetiva real:

$$i_r = \frac{1 + i_a}{1 + I} - 1 = \frac{1,06168}{1,055} - 1 = 0,00632968 = 0,63\% \text{ a.a.}$$

► Exemplo 9.3

Um capital aplicado durante dois anos à taxa aparente de 18% a.a., capitalizada mensalmente, rendeu \$1.500 de juros. Considerando uma inflação anual de 12% a.a., calcular o capital e as taxas de rentabilidade aparente e real da aplicação.

Dados: $m = 2$ anos, $I = 12\%$ a.a., juros = \$1.500, $j = 18\%$ a.a., $k = 12$, $P = ?$, $i_a = ?$, $i_r = ?$

a) Cálculo do capital aplicado:

rendimento = montante - aplicação

$$\$1.500 = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} - P$$

$$\$1.500 = P \left[\left(1 + \frac{0,18}{12} \right)^{12 \times 2} - 1 \right] \Rightarrow P = \frac{\$1.500}{(1,015)^{24} - 1} = \$3.492,41$$

b) Rentabilidade aparente:

$$\frac{\text{juros nominais (aparentes)}}{\text{aplicação não corrigida}} = \frac{\$1.500,00}{\$3.492,41} = 42,95\% \text{ em 2 anos}$$

$$i_a \Rightarrow (1,4295)^{1/2} - 1 = 19,56\% \text{ a.a.}$$

$$\text{ou: } (1 + i_a) = \left(1 + \frac{0,18}{12} \right)^{12} \Rightarrow i_a = 19,56\% \text{ a.a.}$$

c) Rentabilidade real:

$$i_r = \frac{\text{Rendimento real}}{\text{Aplicação corrigida}} = \frac{\text{Montante} - \text{Aplicação corrigida}}{\text{Aplicação corrigida}}$$

$$= \frac{(\$1.500,00 + \$3.492,41) - \$3.492,41 \times (1,12)^2}{\$3.492,41 \times (1,12)^2} = 13,96\% \text{ em 2 anos}$$

$$\text{Taxa real anual: } i_r = (1,1396)^{1/2} - 1 = 6,75\% \text{ a.a.}$$

$$\text{ou: } i_r = \frac{1 + \text{Taxa de rentabilidade aparente}}{1 + \text{Taxa de inflação}} - 1 = \frac{1 + 0,1956}{1 + 0,12} - 1 = 6,75\% \text{ a.a.}$$

► Exemplo 9.4

Um investidor aplicou, pelo prazo de 31 dias, \$400.000 em um título prefixado que rende juros efetivos de 16% a.a. mais TR (taxa referencial). Supondo uma variação de 1,5% para a TR no período, calcular o rendimento real e outros parâmetros importantes da operação.

a) Taxa relativa ao período de aplicação:

$$i_{31d} = (1 + 0,16)^{31/360} - 1 = 0,012862632 = 1,2863\% \text{ em 31 dias}$$

b) Rendimento bruto aparente no período de aplicação:

$$R_b = 0,012863 \times \$400.000 = \$5.145,05$$

c) Ganho pela variação da TR (1,5%):

$$= \text{variação da TR no período} \times \text{aplicação} = 0,015 \times \$400.000 = \$6.000$$

d) Impostos (8% sobre o ganho da operação):

$$0,08 \times (\$5.145,06 + \$6.000) = \$891,60$$

e) Valor de resgate líquido:

$$\$400.000 + (\$5.145,06 + \$6.000) - \$891,60 = \$410.253,46$$

f) Rentabilidade aparente da aplicação:

$$i = (\$410.253,46 \div \$400.000) - 1 = 0,025634 = 2,5634\% \text{ para 31 dias}$$

Taxa mensal equivalente:

$$i_m = (1,025634)^{30/31} - 1 = 0,024797 = 2,4797\% \text{ a.m.}$$

g) Rentabilidade real da aplicação:

$$i_r = \frac{1 + i_m}{1 + I} - 1 = \frac{1,024797}{1,02} - 1 = 0,004703 \approx 0,47\% \text{ a.m.}$$

► Exemplo 9.5

No último trimestre do ano, o salário nominal de um operário, recebido no último dia de cada mês, foi o seguinte: outubro = \$12.000; novembro = \$13.800 e dezembro = \$16.560. Calcular a taxa de crescimento real do salário considerando que o índice de preços escolhido teve as seguintes variações: novembro = 1%, dezembro = 2%.

Mês	Salário em valores nominais (1)	Varição do índice (2)	Deflator (base outubro) (3)	Salário deflacionado (preços de outubro) (1)/(3)	Crescimento real (% a.m.)	Crescimento aparente (% a.m.)
Outubro	\$12.000	—	1,0000	\$12.000	—	—
Novembro	\$12.600	1%	1,0100	\$12.475	3,96%	5%
Dezembro	\$12.960	2%	1,0302	\$12.580	0,84%	2,86%

Para *deflacionar* (colocar os salários em moeda de outubro), usamos um *deflator* que assume o valor 1,0000 em outubro. Em novembro, seu valor será $1,0000 \times 1,01 = 1,0100$ e, em dezembro, $1,0100 \times 1,02 = 1,0302$.

Com os salários dos três meses em moeda do mês de outubro (moeda constante de outubro), podemos calcular seu crescimento real nos meses de novembro e dezembro e no período todo:

$$C_r(\text{novembro}) = \frac{12.475}{12.000} - 1 = 3,96\% \quad C_r(\text{dezembro}) = \frac{12.580}{12.475} - 1 = 0,84\%$$

$$C_r(\text{no período}) = \frac{12.580}{12.000} - 1 = 4,83\%$$

Em termos reais, em novembro houve um ganho de 3,96% em relação ao mês de outubro e, em dezembro, houve um ganho de 0,84% em relação ao mês anterior. No período considerado, o ganho real total foi de 4,83% na capacidade de compra do salário. Por outro lado, o crescimento nominal ou aparente mostra taxas de 5% e 2,86% para os meses de novembro e dezembro, respectivamente. Esse exemplo ilustra a importância de estimar o crescimento real dos fluxos e valores financeiros.

► Exemplo 9.6

Calcular o custo real de um empréstimo contratado a uma taxa efetiva de 20%, considerando uma inflação de 15% no período.

Dados: $I = 15\%$, $i = 20\%$, $i_r = ?$

$$i_r = \frac{(1 + i)}{(1 + I)} - 1 = \frac{1,20}{1,15} - 1 = 0,043478 = 4,3478\% \text{ no período}$$

► Exemplo 9.7

Calcular, em moeda nacional, o custo efetivo mensal de um empréstimo em moeda estrangeira contratado à taxa efetiva de 3% a.m., considerando uma desvalorização da moeda nacional de 2% a.m.

Dados: $i_{ME} = 3\% \text{ a.m.}$, $i_{td} = 2\% \text{ a.m.}$, $i_{MN} = ?$

$$i_{MN} = (1 + i_{ME}) \times (1 + i_{td}) - 1 = (1,03) \times (1,02) - 1 = 5,06\% \text{ a.m.}$$

► Exemplo 9.8

Uma aplicação de \$100 teve um rendimento aparente de \$35. Considerando uma inflação de 30% durante o período de investimento, calcular as rentabilidades aparente e real da operação.

Dados: $P = \$100$, $I = 30\%$, rendimento aparente = \$35, $i_r = ?$, $i = ?$

- Rentabilidade aparente:

$$i = \frac{\text{Rendimento aparente}}{\text{Aplicação}} = \frac{\$35}{\$100} = 35\% \text{ no período}$$

- Rentabilidade real:

$$(1 + i) = (1 + i_r) \times (1 + I) \Rightarrow i_r = \frac{(1 + i)}{(1 + I)} - 1 = \frac{1,35}{1,30} - 1 = 3,85\%$$

Detalhadamente:

$$\begin{aligned} i_r &= \frac{\text{Rendimento real}}{\text{Aplicação atualizada}} = \frac{(\text{Montante}) - (\text{Aplicação atualizada})}{\text{Aplicação atualizada}} \\ &= \frac{(P + \text{rendimento aparente}) - P(1 + I)}{P(1 + I)} \\ &= \frac{(\$100 + \$35) - \$100 \times 1,30}{\$100 \times 1,30} = \frac{\$5}{\$130} = 3,85\% \end{aligned}$$

► Exemplo 9.9

Um investimento terá seu rendimento calculado sobre o valor inicial (\$180) atualizado monetariamente pela inflação do período. Considerando que os juros recebidos totalizaram \$20 e que a inflação no período foi de 13,89%, calcular as taxas de rentabilidade aparente e real do investimento.

Dados: P = \$180, J (juros) = \$20, I = 13,89%, i = ?, i_r = ?

- Taxa de rentabilidade real:

$$i_r = \frac{\text{Juros}}{\text{Investimento atualizado}} = \frac{J}{P(1 + I)} = \frac{\$20}{\$180 \times 1,1389} = 9,76\% \text{ no período}$$

- Taxa de rentabilidade aparente:

$$i = (1 + i_r) \times (1 + I) - 1 = 1,0976 \times 1,1389 - 1 = 25\% \text{ no período}$$

► Exemplo 9.10

Uma pessoa comprou no início do ano corrente um terreno por \$140.000, vendendo-o ao final do mesmo ano por \$220.000. Considerando uma inflação anual de 40%, estimar as rentabilidades aparente e real da operação.

Dados: P = \$140.000, S = \$220.000, I = 40% a.a., i_r = ?

Valor de venda do terreno no fim do ano:	\$220.000
Valor de compra do terreno no início do ano:	\$(140.000)
<i>Ganho aparente</i>	\$80.000
Atualização monetária (\$140.000,00 × 0,40)	\$(56.000)
<i>Ganho real</i>	\$24.000

- Rentabilidade aparente:

$$i = \frac{\text{Ganho aparente}}{\text{Investimento}} = \frac{\$80.000}{\$140.000} = 57,14\%$$

- Rentabilidade real:

$$i_r = \frac{\text{Ganho real}}{\text{Investimento atualizado}} = \frac{\$24.000}{\$140.000 \times 1,40} = 12,25\%$$

A inflação do período terá consumido parte considerável do ganho aparente, reduzindo-o a um ganho real de \$24.000, e a rentabilidade real, a 12,25%.

► Exemplo 9.11

Um capital de \$2.000 aplicado por dois anos rende juros reais de 5% a.a. mais atualização monetária calculada com base na inflação. Considerando uma inflação de 40% e 50% para o primeiro e o segundo anos, respectivamente, calcular a rentabilidade real da operação e o montante ao final do segundo ano.

Dados: $P = \$2.000$, $I_1 = 40\%$ a.a., $I_2 = 50\%$ a.a., $i_r = 5\%$ a.a., $S_2 = ?$, $i_r = ?$

- Taxa aparente obtida no período de dois anos:

$$i = (1 + i_r)^2 \times (1 + I_1) \times (1 + I_2) - 1 = (1,05)^2 \times (1,40) \times (1,50) - 1 = 131,53\%$$

- Montante ao final do segundo ano:

$$S_2 = P(1 + i) = \$2.000 \times (1 + 1,3153) = \$4.630,50$$

- Rentabilidade real obtida nos dois anos:

$$i_r = (1,05)^2 - 1 = 10,25\%$$

Pode-se mostrar, de maneira mais detalhada, o ganho nominal e real da operação:

Ao final do primeiro ano, tem-se:

• Principal ou aplicação (P)	\$2.000,00
• Atualização monetária do principal ($AM_1: \$2.000 \times 0,40$)	\$800,00
• Juros sobre o principal atualizado ($J_1: (\$2.000 + \$800) \times 0,05$)	<u>\$140,00</u>
• Montante ao final do primeiro ano (S_1)	\$2.940,00

- Rendimento aparente do primeiro ano: $i = \frac{S_1}{P} - 1 = \frac{\$2.940}{\$2.000} - 1 = 47\%$ a.a.

- Rendimento real do primeiro ano: $i_r = \frac{J_1}{(P + AM_1)} = \frac{\$140}{(\$2.000 + \$800)} = 5\%$ a.a.

Ao final do segundo ano, tem-se:

• Principal (igual a S_1)	\$2.940,00
• Atualização monetária do principal ($AM_2: \$2.940 \times 0,50$)	\$1.470,00
• Juros sobre o principal atualizado ($J_2: (\$2.940 + \$1.470) \times 0,05$)	<u>\$220,50</u>
• Montante ao final do segundo ano (S_2)	\$4.630,50

- Rendimento aparente do segundo ano: $i = \frac{S_2}{S_1} - 1 = \frac{\$4.630,50}{\$2.940} - 1 = 57,5\%$ a.a.

- Rendimento real do segundo ano: $i_r = \frac{J_2}{(S_1 + AM_2)} = \frac{\$220,50}{(\$2.940 + \$1.470)} = 5\%$ a.a.

No segundo ano, a taxa de rendimento aparente e a taxa real atingem, cumulativamente:

- Taxa aparente:

$$i = \frac{S_2}{P} - 1 = \frac{\$4.630,50}{\$2.000} - 1 = 131,53\% \quad \text{ou} \quad i = (1,47) \times (1,575) - 1 = 131,53\%$$

- Taxa real:

$$i_r = \frac{J_1 \times (1 + I_2) + J_2}{P \times (1 + I_1) \times (1 + I_2)} = \frac{\$140 \times (1 + 0,50) + \$220,50}{\$2.000 \times (1,40) \times (1,50)} = 10,25\%$$

► Exemplo 9.12

Um financiamento de \$40.000 será pago por meio de três prestações anuais corrigidas pelo Índice Geral de Preços de Mercado (IGP-M). Considerando que será aplicada uma taxa de juros de 5% a.a., calcular o valor das prestações, supondo uma variação de 20% a.a. para o IGP-M.

Dados: $P = \$40.000$, $n = 3$, $i_r = 5\%$ a.a., $I = 20\%$ a.a.

- Valor das prestações sem correção:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i_r}} = \frac{\$40.000}{a_{\overline{3}|5\%}} = \frac{\$40.000}{2,72325} = \$14.688,34$$

O quadro a seguir apresenta as prestações corrigidas pelo IGP-M:

Fim do ano	Prestação (1)	Variação do IGP-M (2)	Inflator (3)	Prestação atualizada (4) = (1) x (3)
1º	\$14.688,34	20%	1,200	\$17.626,01
2º	\$14.688,34	20%	1,440	\$21.151,21
3º	\$14.688,34	20%	1,728	\$25.381,46

Inflator do ano 0 = 1,000

Inflator do ano 1 = $1,000 \times 1,2 = 1,200$

Inflator do ano 2 = $1,200 \times 1,2 = 1,440$

Inflator do ano 3 = $1,440 \times 1,2 = 1,728$

► Exemplo 9.13

Um capital de \$130.000 foi aplicado durante 15 meses a juros reais de 5% a.m. mais atualização monetária correspondente à inflação do período. Considerando que no período da aplicação a inflação foi de 94,30%, calcular o valor de resgate.

Dados: $P = \$130.000$, $i_r = 5\%$ a.m., $I = 94,30\%$ (no período de 15 meses), $S = ?$

- Taxa aparente obtida no período de 15 meses:

$$(1 + i) = (1 + i_r)^{15} \times (1 + I) \Rightarrow i = (1,05)^{15} \times (1,9430) - 1 = 3,0394 = 303,94\%$$

- Valor de resgate:

$$S = P(1 + i) = \$130.000 \times (1 + 3,0394) = \$525.122$$

▶ **Exemplo 9.14**]

A taxa aparente obtida por uma aplicação financeira é de 28% a.m. Qual será o rendimento real se a inflação for de: a) 24% a.m., b) 97% a.a., c) 380% a.s.?

$$\text{a) } i_r = \frac{(1 + i)}{(1 + I)} - 1 = \frac{1,28}{1,24} - 1 = 0,0323 = 3,23\% \text{ a.m.}$$

$$\text{b) } i_r = \frac{1,28}{(1,97)^{1/12}} - 1 = 20,97 = 0,787\% \text{ a.m.}$$

$$\text{c) } i_r = \frac{1,28}{(4,80)^{1/6}} - 1 = -1,4470\% \text{ a.m.}$$

No caso c, a taxa de juros real é negativa, ou seja, o rendimento aparente proporcionado pelo banco (28%) não protege totalmente o investimento dos efeitos corrosivos da inflação. Haverá descapitalização do valor aplicado.

▶ **Exemplo 9.15**]

Durante certo período, uma aplicação obteve um rendimento total de \$40 (juros e atualização monetária). Considerando no período uma inflação de 20% e uma taxa de juros real de 10%, calcular o valor dos juros obtidos e o valor da atualização monetária.

Dados: Rendimento total = \$40, $I = 20\%$, $i_r = 10\%$, $J = ?$, $AM = ?$

- Cálculo do capital aplicado:

$$(1 + i) = (1 + i_r) \times (1 + I)$$

$$\left(1 + \frac{\$40}{P}\right) = (1,10) \times (1,20) \Rightarrow P = \$125$$

- Juros obtidos:

$$J = P(1 + I) \times i_r = \$125 \times 1,2 \times 0,1 = \$15$$

- Atualização monetária:

$$AM = P \times I = \$125 \times 0,20 = \$25$$

▶ **Exemplo 9.16**]

Uma máquina cujo valor à vista é \$34.000 será paga em oito prestações mensais fixas de \$7.576,91 cada. Considerando uma taxa de juros real na praça de 2% a.m., encontrar a taxa de inflação projetada embutida no cálculo das prestações.

Dados: $P = 34.000$, $n = 8$, $R = \$7.576,91$, $i_r = 2\% \text{ a.m.}$, $I = ?$

O fator financeiro que permite determinar a taxa de juros aparente pode ser encontrado considerando-se que o valor à vista é igual ao valor presente das prestações:

$$P = R \times a_{\overline{8}|i\%} \Rightarrow a_{\overline{8}|i\%} = \frac{34.000}{7.576,91} = 4,48732$$

Nas tabelas financeiras do Apêndice, podemos observar que esse fator corresponde a uma taxa de juros aparente de 15% a.m., dado que $a_{\overline{8}|15\%} = 4,48732$.

- Taxa de inflação projetada:

$$(1 + i) = (1 + i_r) \times (1 + I) \Rightarrow I = \frac{1 + i}{1 + i_r} - 1 = \frac{1,15}{1,02} - 1 = 12,75\% \text{ a.m.}$$

► Exemplo 9.17

Um investidor aplicou determinado capital pelo prazo de dois meses em uma conta remunerada que paga juros reais de 5% a.m. mais atualização monetária pela inflação do período. Considerando que ao término do prazo obteve um rendimento aparente de \$212,75 e que a inflação durante os dois meses totalizou 10%, calcular o capital, os juros e a atualização monetária do período.

Dados: Rendimento aparente = \$212,75, $I = 10\%$, $i_r = 5\%$ a.m., $P = ?$, $J = ?$, $AM = ?$

- Cálculo do capital aplicado:

$$(1 + i) = (1 + i_r)^2 \times (1 + I)$$

$$\left(1 + \frac{\$212,75}{P}\right) = (1,05)^2 \times (1,10) \Rightarrow P = \$1.000$$

- Juros obtidos no período:

$$J = P(1 + I) \times [(1 + i_r)^2 - 1] = \$1.000 \times (1,10) \times [(1,05)^2 - 1] = \$112,75$$

- Atualização monetária no período:

$$AM = \$212,75 - \$112,75 = \$100$$

► Exemplo 9.18

Calcular o crescimento real dos lucros de uma empresa que, nos últimos quatro anos, teve os seguintes lucros:

(Em valores nominais de 31 de dezembro)

	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano
Lucro líquido	\$845	\$1.274	\$1.547	\$1.937

No quadro a seguir, os lucros são inflacionados para valores do quarto ano:

Ano	Inflação	Índice inflator	Lucro	Lucro líquido em valores do 4º ano
1º ano	—	1,000000	\$845	$\$845 \times 2,511575 / 1,000000 = \$2.122,28$
2º ano	30,00%	$1,000000 \times 1,30 = 1,300000$	\$1.274	$\$1.274 \times 2,511575 / 1,300000 = \$2.461,34$
3º ano	40,025%	$1,300000 \times 1,40025 = 1,820325$	\$1.547	$\$1.547 \times 2,511575 / 1,820325 = \$2.134,46$
4º ano	37,974%	$1,820325 \times 1,37974 = 2,511575$	\$1.937	$\$1.937 \times 2,511575 / 2,511575 = \$1.937,00$

- Taxa de crescimento real dos lucros no período:

$$C_r = \frac{\text{Lucros do 4º ano em valores do 4º ano}}{\text{Lucros do 1º ano em valores do 4º ano}} - 1 = \frac{\$1.937,00}{\$2.122,28} - 1 = -8,73\%$$

Verifica-se um decréscimo real de $-8,73\%$ nos lucros da empresa no período considerado.

► Exemplo 9.19

Um empréstimo de \$200.000 foi tomado em 1º de janeiro de 20X1 para ser amortizado em quatro prestações anuais pelo Sistema de Amortizações Constantes (SAC). Levando-se em conta que o financiamento foi tomado a juros de 4% a.a. mais atualização monetária, construir a planilha de amortização e calcular o custo efetivo real do financiamento. Para os cálculos de atualização monetária, considerar a variação do IGP-M.

- Planilha pelo Sistema SAC, sem atualização monetária:

Fim do ano	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	\$200.000	—	—	—
1º ano	\$150.000	\$50.000	\$8.000	\$58.000
2º ano	\$100.000	\$50.000	\$6.000	\$56.000
3º ano	\$50.000	\$50.000	\$4.000	\$54.000
4º ano	—	\$50.000	\$2.000	\$52.000

- Cálculo do índice (*inflator*) de atualização monetária para cada ano:

Ano	Varição do IGP-M	Inflator
1º ano	20,0000%	1,20000
2º ano	20,3225%	1,44387
3º ano	17,2924%	1,69355
4º ano	14,8954%	1,94581

1º ano: $1,00000 \times 1,20000 = 1,20000$ 3º ano: $1,44387 \times 1,172924 = 1,69355$
 2º ano: $1,20000 \times 1,203225 = 1,44387$ 4º ano: $1,69355 \times 1,148954 = 1,94581$

- Planilha pelo Sistema SAC, com atualização monetária:

Para atualizar monetariamente os valores, basta multiplicar cada linha da planilha sem atualização pelo *inflator* do ano respectivo. Os valores atualizados são mostrados a seguir:

(Valores atualizados pelo IGP-M)

Ano	Inflator	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	1,00000	\$200.000,00	—	—	—
1º ano	1,20000	\$180.000,00	\$60.000,00	\$9.600,00	\$69.600,00
2º ano	1,44387	\$144.387,00	\$72.193,50	\$8.663,22	\$80.856,72
3º ano	1,69355	\$84.677,50	\$84.677,50	\$6.774,20	\$91.451,70
4º ano	1,94581	—	\$97.290,50	\$3.891,62	\$101.182,12

O custo efetivo aparente do financiamento é a taxa interna de retorno (TIR) do fluxo de caixa, ou seja, o valor da TIR que satisfaz a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \$200.000 - \frac{\$69.600,00}{(1 + \text{TIR})} - \frac{\$80.856,72}{(1 + \text{TIR})^2} - \frac{\$91.451,70}{(1 + \text{TIR})^3} - \frac{\$101.182,12}{(1 + \text{TIR})^4} = 0 \\ \Rightarrow \text{TIR} = 23,86\% \text{ a.a.} \end{aligned}$$

O custo efetivo real anual médio é:

$$i_r = \frac{1,2386}{(1,94581)^{1/4}} - 1 = 4,87\% \text{ a.a.}$$

Exercícios propostos

- Um financiamento de \$12.000 foi contratado sob as seguintes condições: carência de três trimestres (durante esse período serão pagos unicamente os juros); juros de 15% a.t.; IOF de 2% sobre o principal (pago no ato); comissão de abertura de crédito de 1% sobre o financiamento (paga no ato); oito prestações antecipadas trimestrais segundo a Tabela Price; variação do IGPM/FGV de 3% a.t. Pedese: construir a planilha de pagamentos sem considerar a atualização monetária; calcular o custo efetivo real do financiamento.
- No Exercício 1, supondo que durante o período de carência os juros sejam capitalizados e incorporados ao principal, determinar o saldo devedor ao fim da carência, sem considerar a atualização monetária.
- No Exercício 1, calcular o valor das prestações, admitindo que sejam atualizadas monetariamente segundo as variações do IGPM/FGV.
- No Exercício 1, supondo que durante o período de carência os juros sejam capitalizados e incorporados ao principal, determinar: a) o valor das prestações sem atualização monetária; b) o valor das prestações atualizadas monetariamente segundo as variações do IGPM/FGV.
- No Exercício 1, considerando a atualização monetária de acordo com as variações do IGPM/FGV, calcular o custo efetivo aparente do financiamento.
- No Exercício 1, considerando a atualização monetária de acordo com as variações do IGPM/FGV, determinar o valor do saldo devedor do financiamento ao fim do sexto trimestre.
- Considerando que nos últimos quatro meses os impostos arrecadados por uma prefeitura e o IGP-DI evoluíram de acordo com a tabela a seguir, estimar o crescimento ou decréscimo real dos impostos no período em questão.

Mês	Imposto nominal	Valor do IGP-DI
Setembro	\$40.000	\$200,00
Outubro	\$48.000	\$236,00
Novembro	\$59.040	\$287,92
Dezembro	\$67.896	\$348,38

- A quantia de \$81.600 foi financiada a juros de 5% a.m. e deverá ser paga em quatro prestações mensais. Um imposto de 2% sobre o financiamento foi pago no ato do contrato. Considerando uma variação constante de 10% a.m. para a taxa de inflação, construir a planilha de pagamentos, mostrando as prestações em valores atualizados monetariamente.
- No exercício anterior, estimar o custo efetivo real e aparente (nominal) do financiamento.
- Calcular a taxa de juros mensal aparente (nominal) que permita a uma financeira auferir juros reais de 4% a.m., considerando as seguintes hipóteses de inflação: a) 12% a.m.; b) 420% a.a.; c) 200% a.s.

11. Uma aplicação de \$430.000 rendeu \$22.500 no prazo de nove meses. Considerando uma taxa de inflação constante e igual a 3,8% a.m., qual foi a rentabilidade mensal aparente e real do investimento?
12. Um equipamento é vendido por \$250.000 à vista ou em 18 prestações mensais iguais com atualização monetária prefixada. Calcular o valor unitário das prestações, considerando juros reais de 9% a.a. e uma variação projetada de 96% a.a. para o indexador delas.
13. Uma aplicação de \$132.000 ganha juros efetivos de 2% a.m. mais atualização monetária de acordo com as variações do IGPM/FGV. Considerando uma variação anual do IGPM de 300% a.a. (taxa mensal constante ao longo do período), qual será o montante recebido pelo investidor após 11 meses de aplicação?
14. João tomou um financiamento de \$140.000 a juros de 5% a.m. mais atualização monetária pela inflação do período e pretende pagar 30% da dívida daqui a 30 dias e o saldo três meses depois. Qual será o valor desse segundo pagamento, considerando uma inflação de 240% a.a. (taxa mensal constante ao longo do período)?
15. Um financiamento de \$180.000 será pago em dez prestações mensais fixas de \$29.294,16. Considerando uma inflação de 7% a.m., calcular a taxa de juros real paga pelo financiamento.
16. Uma pessoa aplicou \$200.000 em um plano de capitalização. Após oito meses, resgatou o investimento, cujo saldo bruto nessa época foi de \$280.000. Considerando que o banco cobra taxas administrativas de 4% sobre o valor resgatado e que foi pago um imposto de 3,5% sobre o rendimento da aplicação, calcular as rentabilidades efetivas aparente e real da aplicação a uma inflação no período de 26%.
17. Uma empresa tomou emprestados \$800.000 pelo prazo de nove meses a juros efetivos de 15% a.a. mais atualização monetária definida pelas variações do IGPM/FGV. Correm por conta da empresa o IOF de 0,4% e uma taxa de abertura de crédito de 4% sobre o valor do empréstimo (pagos no ato da liberação do empréstimo). Supondo que o empréstimo fosse liquidado por meio de um único pagamento ao fim do prazo, calcular os custos efetivos aparente e real do financiamento, considerando uma variação de 100% no período para o IGPM.

Métodos e critérios de avaliação de investimentos de capital

1 2 3 4 5 6 7 8 9 **10** 11

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Valor presente líquido
- Taxa interna de retorno
- *Pay-back* descontado
- Índice custo-benefício
- Anuidade equivalente
- Custo anual equivalente
- Ranking e seleção de alternativas de investimento: racionamento de capital
- Avaliação do *leasing* financeiro

Orçamentação de capital é o nome dado ao processo de decisões de procura e aquisição de ativos de longo prazo. Com esse fim, existem várias técnicas, métodos, convenções e critérios que são comumente utilizados na análise e no processo decisório.

O valor de um projeto é baseado em sua capacidade de gerar fluxos de caixa futuros, ou seja, de gerar renda econômica. Assim, as alternativas de investimento podem ser comparadas somente se as consequências monetárias forem medidas em um ponto comum no tempo e, como as operações de investimento ou financiamento têm por característica um espaçamento dos fluxos de caixa ao longo do tempo, os critérios de avaliação econômica devem considerar sua atualização. Os critérios de seleção que não atualizam fluxos de caixa, por exemplo, o método do retorno sobre o investimento (ROI), aplicam conceitos contábeis que, mesmo considerando a vantagem da simplicidade de seu uso, não são apropriados para medir renda econômica e criação de valor geradas por uma alternativa de investimento.

Neste capítulo, discutiremos e apresentaremos a parte relacionada aos métodos geralmente usados para medir a rentabilidade e analisar a viabilidade econômica das alternativas de investimento. Focaremos principalmente o valor presente líquido (VPL), a taxa interna de retorno (TIR), o *pay-back* descontado, o índice custo-benefício, a anuidade e o custo anual equivalente.

10.1 Método do valor presente líquido (VPL)

O método do valor presente líquido (VPL) tem por finalidade calcular, em termos de valor presente, o impacto dos eventos futuros associados a uma alternativa de investimento, ou seja, ele mede o valor presente dos fluxos de caixa gerados pelo projeto ao longo de sua vida útil. Não existindo restrição de capital, argumenta-se que esse critério leva à escolha ótima, pois maximiza o valor da empresa.

A seguinte expressão define o VPL:

$$\text{VPL} = -I + \sum_{t=1}^n \frac{FC_t}{(1+K)^t}$$

critério de decisão: se $\text{VPL} > 0 \Rightarrow$ projeto economicamente viável

FC_t representa o fluxo de caixa no t -ésimo período, I é o investimento inicial, K é o custo do capital, e o símbolo Σ , *somatório*, indica que deve ser realizada a soma da data 1 até a data n dos fluxos de caixa descontados no período inicial. A regra decisória a ser seguida ao se aplicar o VPL é: empreenda o projeto se o VPL for positivo.

O objetivo do VPL é encontrar alternativas de investimento que valham mais para os patrocinadores do que custam — alternativas que tenham um VPL positivo. Seu cálculo reflete as preferências entre consumo presente e consumo futuro e a incerteza associada aos fluxos de caixa futuros. O processo por meio do qual os fluxos de caixa são ajustados a esses fatores chama-se desconto, e a magnitude desses fatores é refletida na taxa de desconto usada (custo do capital). O processo de desconto converte os fluxos de caixa futuros em valores presentes, pois fluxos de épocas diferentes não podem ser comparados nem agregados enquanto não forem convertidos para valores de uma mesma época.

Por exemplo, considerando que uma alternativa de investimento requiera um desembolso inicial de \$200.000 que propiciaria a geração de fluxos de caixa de \$75.000 por ano durante cinco anos, o VPL calculado a um custo do capital de 15% a.a. seria o seguinte:

$$\text{VPL} = -\$200.000 + \frac{\$75.000}{(1,15)} + \frac{\$75.000}{(1,15)^2} + \dots + \frac{\$75.000}{(1,15)^5} = \$51.412 > 0$$

O VPL é positivo, indicando a viabilidade econômica da alternativa. O investimento inicial de \$200.000 será recuperado em cinco anos, obtendo-se uma proteção adicional equivalente a \$51.412 em termos de valor presente. Essa proteção poderá ser esperada caso as estimativas do fluxo de caixa estejam corretas e se a alternativa completar seu prazo. Assim, a proteção implícita de \$51.412 é realmente um lucro de valor econômico que excede o padrão de ganhos mínimos exigidos de 15% a.a.

10.2 Método da taxa interna de retorno (TIR)

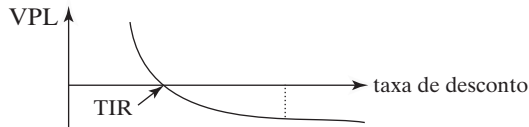
Por definição, a TIR é a taxa de retorno do projeto de investimento. O método da TIR não tem como finalidade a avaliação da rentabilidade absoluta a determinado custo do capital (processo de atualização), como o VPL, mas, ao contrário, seu objetivo é encontrar uma taxa intrínseca de rendimento.

Matematicamente, a TIR é uma taxa hipotética que anula o VPL, ou seja, é aquele valor de i^* que satisfaz a seguinte equação:

$$\text{VPL} = -I + \sum_{t=1}^n \frac{\text{FC}_t}{(1 + i^*)^t} = 0$$

Critério de decisão: se $i^* > K \Rightarrow$ projeto economicamente viável

O gráfico a seguir mostra o VPL em função da taxa de desconto. Nele, a TIR é dada pela intersecção da curva que representa o polinômio do VPL com o eixo das abscissas, ou seja, o ponto em que o VPL é igual a zero.



A regra decisória a ser seguida no método da TIR é: emprenda o projeto de investimento se a TIR exceder o custo de oportunidade do capital. Essencialmente, ela diz: a taxa de retorno esperada sobre o projeto de investimento excede a taxa de retorno requerida? O projeto criará valor? A princípio, parece dizer a mesma coisa expressa na regra do VPL, mas, como veremos nas seções seguintes, isso nem sempre é verdade. O apelo intuitivo provavelmente responde pelo uso generalizado do método da TIR. As pessoas geralmente preferem tomar suas decisões fazendo comparações em termos de porcentagens.

Tomando o mesmo exemplo anterior, a TIR da alternativa de investimento será:

$$\text{VPL} = -\$200.000 + \frac{\$75.000}{(1 + \text{TIR})^1} + \dots + \frac{\$75.000}{(1 + \text{TIR})^5} = 0 \Rightarrow \text{TIR} = 25,42\% \text{ a.a.}$$

A TIR (25,42%) é maior que o custo do capital (15%), indicando a viabilidade econômica da alternativa.

10.3 Método do *pay-back* descontado

Muitas vezes é necessário saber qual será o tempo de recuperação do investimento. Ou seja, quantos anos decorrerão até que o valor presente dos fluxos de caixa previstos se iguale ao investimento inicial. Se I representa o investimento inicial, FC_t representa o fluxo de caixa no período t e K representa o custo do capital, o método do *pay-back* descontado consiste basicamente em determinar o valor de T na seguinte equação:

$$I = \sum_{t=1}^T \frac{\text{FC}_t}{(1 + K)^t}$$

Esse indicador é utilizado em conjunto com outros métodos, por exemplo, o VPL ou a TIR.

No exemplo anterior, o *pay-back* descontado pode ser encontrado com a resolução da seguinte igualdade para T :

$$\begin{aligned}
 \$200.000 &= \underbrace{\frac{\$75.000}{(1,15)^1} + \frac{\$75.000}{(1,15)^2} + \dots + \frac{\$75.000}{(1,15)^T}}_{\text{VP}} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } T = 3 \Rightarrow \text{VP} = \$171.242 \\ \text{Se } T = 4 \Rightarrow \text{VP} = \$214.123 \end{array} \right\} &\Rightarrow T = 4
 \end{aligned}$$

O investimento (\$200.000) será recuperado em, no mínimo, quatro anos.

10.4 Método do custo-benefício

O índice custo-benefício (B/C) é um indicador que resulta da divisão do valor atual dos benefícios pelo valor atual dos custos do projeto (incluído o investimento inicial). Ele permite descobrir a viabilidade econômica de um empreendimento, bastando para isso observar se o índice é maior que 1.

O índice não reflete necessariamente a maior ou menor conveniência de um projeto com relação a outros. Pode ocorrer que dois projetos com diferentes rentabilidades (TIR) tenham o mesmo índice custo-benefício. O índice pode ser expresso da seguinte forma:

$$B/C = \frac{\sum_{t=0}^n \frac{b_t}{(1+K)^t}}{\sum_{t=0}^n \frac{c_t}{(1+K)^t}}$$

onde: B/C = índice custo-benefício
 b_t = benefícios do período t
 c_t = custos do período t
 n = horizonte de planejamento
 K = custo do capital

No exemplo anterior, o índice custo-benefício pode ser calculado da seguinte forma:

$$B/C = \frac{\frac{\$75.000}{1,15} + \frac{\$75.000}{(1,15)^2} + \dots + \frac{\$75.000}{(1,15)^5}}{\$200.000} = \frac{\$251.412}{\$200.000} = 1,26 > 1$$

Um índice custo-benefício (B/C) maior que 1 indica que o projeto é economicamente viável. O índice está sujeito a um problema de dimensão, pois depende da forma como é calculado. O Exemplo 10.2 demonstra esse problema.

10.5 Método da anuidade equivalente

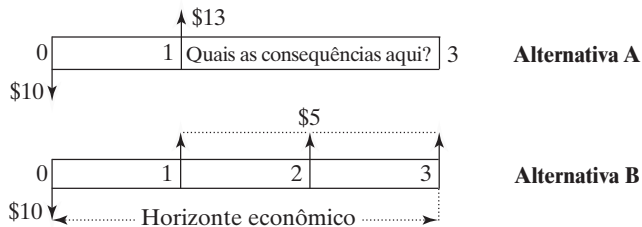
É essencial que qualquer estudo específico sobre aplicação de capital seja realizado dentro do contexto de um horizonte de planejamento uniforme. Ou seja, para que os projetos possam ser objeto de uma comparação, é necessário que sejam comparáveis. Embora o VPL seja uma ferramenta útil para avaliar alternativas de investimento, ele não responde a todas as perguntas sobre a vantagem econômica de uma alternativa em relação a outra que tenha duração prevista diferente.

Podemos ilustrar o problema analisando duas alternativas de prazos diferentes, nas quais A e B poderiam ser tipos de equipamentos que executam a mesma tarefa, em que A tem vida útil de um ano e B, de três anos.

Fluxo de caixa

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	TIR	VPL (10%)
A	-\$10	\$13			30,00%	\$1,82
B	-\$10	\$5	\$5	\$5	23,38%	\$2,43

Observa-se no quadro que a seleção pela TIR e pelo VPL é contraditória. Pela TIR, a alternativa A deveria ser selecionada, enquanto pelo VPL seria a alternativa B. Se considerarmos o VPL como critério ótimo de escolha, a alternativa B será selecionada; contudo, argumenta-se que a solução válida requer que as alternativas sejam levadas para um horizonte econômico comum. Para isso, seria necessário admitir que a máquina A possa ser substituída uma ou mais vezes ao fim de sua vida útil por outra idêntica, até que seu horizonte econômico seja igualado ao da alternativa B. Esse procedimento é chamado *regra da cadeia*. Os horizontes econômicos das duas alternativas são igualados em alguma data futura que corresponda ao mínimo múltiplo comum dos prazos de ambas. No presente exemplo, os horizontes se igualam no terceiro ano após duas substituições do equipamento A.



O quadro a seguir apresenta o fluxo de caixa da alternativa A, já considerando as substituições consecutivas necessárias para igualar seu horizonte econômico ao da alternativa B.

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	VPL (10%)
Fluxo da máquina A	-\$10	\$13			
1ª substituição de A		-\$10	\$13		
2ª substituição de A			-\$10	\$13	
Fluxo de caixa líquido	-\$10	\$3	\$3	\$13	\$4,97

Note-se que, igualados os horizontes econômicos das duas alternativas por meio da repetição sucessiva da alternativa de menor duração, a alternativa A passa a ser preferível, dado que o VPL de A, com suas duas substituições, agora é maior em relação ao VPL de B ($\$4,97 > \$2,43$). Conseqüentemente, na comparação de alternativas de duração diferente, a aplicação direta do método do VPL como critério de seleção, sem igualar previamente os horizontes econômicos das alternativas, pode resultar em decisões inconsistentes com a maximização do valor da empresa.

Como os horizontes econômicos das alternativas são igualados em um período igual ao mínimo múltiplo comum de seus prazos, seria uma tarefa muito cansativa aplicar esse

raciocínio se, por exemplo, a duração da alternativa A fosse 18 anos e a de B fosse 42 anos, pois os horizontes econômicos seriam iguais somente no 126º ano, o que resultaria em sete repetições sucessivas para A e três para B.

Um método alternativo — porém mais prático em relação ao de substituições ou repetições sucessivas — é o da anuidade equivalente (AE). Esse indicador mostra de que modo seria distribuída a renda econômica gerada pelo projeto se a referida distribuição fosse equitativa para cada ano. Ou seja, equivale a repartir o VPL ao longo da vida útil do projeto, transformando-o em uma série uniforme equivalente que pode ser legitimamente comparada entre projetos de duração diferente.

A anuidade equivalente (AE) pode ser calculada por meio da seguinte expressão:

$$AE = \frac{VPL}{a_{n|k\%}}$$

onde: $a_{n|k\%}$ = fator de valor presente de séries uniformes = $\left[\frac{(1+k)^n - 1}{(1+k)^n \times k} \right]$

AE = anuidade equivalente; K = custo do capital; n = prazo da alternativa

No presente exemplo, as AEs das alternativas A e B são as seguintes:

$$AE_A = \frac{VPL_A}{a_{1|10\%}} = \frac{\$1,82}{\left[\frac{(1,10)^1 - 1}{(1,10)^1 \times 0,10} \right]} = \$2,00/\text{ano}$$

$$AE_B = \frac{VPL_B}{a_{3|10\%}} = \frac{\$2,43}{\left[\frac{(1,10)^3 - 1}{(1,10)^3 \times 0,10} \right]} = \$0,98/\text{ano}$$

Como AE_A é maior que AE_B , conclui-se que a alternativa A é preferível. AE representa, tal como o VPL, criação de valor. Escolhe-se a alternativa que cria mais valor por unidade de tempo. O método da AE não coloca explicitamente a repetição das alternativas — como o faz o processo de substituições sucessivas —, mas sim implicitamente. Em outras palavras, o método supõe implicitamente que as alternativas serão substituídas por outras idênticas ao término de seu prazo. Essa suposição poderá ser razoável e terá alguma consistência se a dinâmica das mudanças tecnológicas do equipamento for lenta e todas as outras condições permanecerem estáveis.

10.6 Método do custo anual equivalente

Em determinados projetos ou serviços, os benefícios ou as receitas dificilmente podem ser quantificados em termos monetários. Entretanto, os custos podem. Existindo alternativas que produzam o mesmo serviço, quantificável ou não, mas de diferente custo, a receita ou o benefício podem ser conhecidos ou desconhecidos, mas, como para todas as alternativas é um fator comum, será irrelevante em uma análise incremental. Assim, nesses casos, bastaria conhecer os custos das alternativas e selecionar aquela com os menores custos anualizados.

Muitas vezes, sobretudo em problemas de engenharia econômica, é mais fácil determinar os fluxos de custos do que os fluxos de receitas do projeto. Por exemplo, se o problema for selecionar entre dois geradores de eletricidade que diferem unicamente no tipo de combustível usado, gás natural ou energia elétrica, é mais fácil levantar os custos do metro cúbico de gás natural e do kW/h do que estimar as receitas que dificilmente podemos traduzir em valores monetários. Como traduzir monetariamente os benefícios, tais como o provável aumento da produtividade do pessoal devido à instalação de um sistema de ar refrigerado, a satisfação geral dos empregados etc.?

O custo anual equivalente (CAE) é basicamente um rateio uniforme, por unidade de tempo, dos custos de investimento, de oportunidade e operacionais das alternativas. Imaginemos uma empresa que pretenda adquirir um equipamento que esteja disponível em duas marcas diferentes no mercado: equipamento A e equipamento B. O equipamento A custa \$13.000 e tem vida útil de 12 anos, enquanto o equipamento B custa \$11.000 e possui vida útil de oito anos. Qualquer que seja o equipamento comprado, A ou B, o benefício será o mesmo: \$7.000/ano. O custo do capital da empresa é de 4% a.a.

- Cálculo do CAE das alternativas:

$$CAE_A = \$13.000 / \left[\frac{(1,04)^{12} - 1}{(1,04)^{12} \times 0,04} \right] = \$1.385,18/\text{ano}$$

$$CAE_B = \$11.000 / \left[\frac{(1,04)^8 - 1}{(1,04)^8 \times 0,04} \right] = \$1.633,81/\text{ano}$$

Como os benefícios das duas alternativas são iguais, a seleção pode ser realizada comparando-se o CAE e, nesse caso, é selecionado o equipamento A. O CAE da alternativa A é menor, mesmo exigindo investimento maior, pois este será repartido economicamente também em um período maior.

↑ Exemplos de aplicação →

► Exemplo 10.1

Calcular o VPL e a TIR de um projeto que requer investimento inicial de \$30.000 e produz um fluxo de caixa livre de \$5.000/ano durante 12 anos. Considere um custo do capital de 8% a.a.

- Cálculo do VPL:

$$VPL = -\$30.000 + \$5.000 \times a_{\overline{12}|8\%} = -\$30.000 + \$5.000 \times 7,536078 = \$7.680,40 > 0$$

- Cálculo da TIR:

$$VPL = -\$30.000 + \$5.000 \times a_{\overline{12}|TIR} = 0$$

Manualmente, o procedimento para determinar a TIR seria aproximá-la por meio de uma interpolação linear. O processo consiste em tentar duas taxas de desconto que resultem em VPLs de sinal contrário, de modo que seja possível efetuar a interpolação:

$$\text{VPL}(12\%) = -\$30.000 + \$5.000 \times a_{\overline{12}|12\%} = -\$30.000 + \$5.000 \times 6,194374 = +\$971,87$$

$$\text{VPL}(13\%) = -\$30.000 + \$5.000 \times a_{\overline{12}|13\%} = -\$30.000 + \$5.000 \times 5,917647 = -\$411,77$$

Por proporcionalidade:

$$\frac{971,87}{\text{TIR} - 12} = \frac{411,77}{13 - \text{TIR}} \Rightarrow \text{TIR} = 12,70\% > 8\%$$

Com alguma experiência, o leitor perceberá que normalmente não mais de duas tentativas são necessárias, porque o sinal do primeiro VPL indicará a direção da taxa de desconto apropriada para a segunda tentativa. Um VPL positivo pede uma taxa de desconto maior, enquanto um VPL negativo requer uma taxa menor.

► Exemplo 10.2

Para um custo do capital de 10% a.a., determinar o índice custo-benefício.

	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Custos (c_t)	-\$100	-\$1.100	-\$12.100
Benefícios (b_t)	\$50	\$1.650	\$14.520
Fluxo de caixa líquido	-\$50	\$550	\$2.420

- B/C calculado sobre custos e benefícios:

$$\text{B/C} = \frac{\sum_{t=0}^n \frac{b_t}{(1+K)^t}}{\sum_{t=0}^n \frac{c_t}{(1+K)^t}} = \frac{50 + \frac{1.650}{1,10} + \frac{14.520}{(1,10)^2}}{100 + \frac{1.100}{1,10} + \frac{12.100}{(1,10)^2}} = 1,22$$

- B/C calculado sobre o fluxo de caixa líquido:

$$\text{B/C} = \frac{\frac{550}{1,10} + \frac{2.420}{(1,10)^2}}{50} = 50$$

Podemos notar que o índice B/C está sujeito a um *problema de dimensão*, pois depende da forma como é calculado. Os resultados mostram que o índice calculado a partir da divisão do valor presente dos benefícios pelo valor presente dos custos (1,22) é diferente do calculado a partir da divisão do valor presente dos fluxos de caixa pelo investimento inicial (50). De todo modo, um B/C maior que 1 indica que o projeto é economicamente viável.

► Exemplo 10.3

Considerando um custo do capital de 10% a.a., comparar os seguintes projetos de investimento, usando o índice custo-benefício e o VPL como critérios decisórios.

Projeto A	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Projeto B	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Custos (c_t)	-\$100	-\$1.100	-\$1.700	Custos (c_t)	-\$100	0	0
Benefícios (b_t)	\$50	\$1.650	\$12.100	Benefícios (b_t)	\$50	\$400	\$10.565
Fluxo de caixa líquido	-\$50	\$550	\$10.400	Fluxo de caixa líquido	-\$50	\$400	\$10.565

A seguir, o índice B/C e o VPL são calculados:

Projeto A:

$$B/C = \frac{50 + \frac{1.650}{1,10} + \frac{12.100}{(1,10)^2}}{100 + \frac{1.100}{1,10} + \frac{1.700}{(1,10)^2}} = 4,6 \quad VPL_A = -50 + \frac{550}{1,10} + \frac{10.400}{(1,10)^2} = \$9.045$$

Projeto B:

$$B/C = \frac{50 + \frac{400}{1,10} + \frac{10.565}{(1,10)^2}}{100} = 91,45 \quad VPL_B = -50 + \frac{400}{1,10} + \frac{10.565}{(1,10)^2} = \$9.045$$

O B/C foi calculado a partir da divisão do valor presente dos benefícios pelo valor presente dos custos. Aparentemente, esse índice indicaria que a alternativa B é a melhor. No entanto, vemos que as duas alternativas são equivalentes, pois têm o mesmo VPL (\$9.045). O exemplo mostra que o índice custo-benefício não deve ser utilizado isoladamente na comparação e seleção de alternativas mutuamente exclusivas, pois não reflete necessariamente a maior ou menor conveniência ou atratividade real de uma alternativa com relação à outra.

► **Exemplo 10.4**

Para um custo do capital de 10% a.a. e com as informações disponíveis a seguir, qual será o projeto selecionado? Qual indicador deverá ser utilizado na seleção?

Ano	A	B	C	D
0	-\$8.000	-\$8.000	-\$8.000	-\$8.000
1	\$1.000	\$7.000	\$2.000	\$3.500
2	\$2.000	-\$1.000	\$1.000	\$4.500
3	\$3.000	\$6.000	\$2.000	\$2.000
4	\$4.000	-\$1.000	\$8.000	\$1.000
VPL	-\$452	\$1.362	\$1.611	\$1.087
TIR	7,8%	21,3%	16,8%	17,5%
B/C	0,94	1,17	1,20	1,14

Nem o índice B/C nem a TIR são adequados para comparar alternativas. O método apropriado é o VPL, pois seleciona a alternativa que cria maior valor em termos de valor presente. Portanto, selecionamos o projeto C.

► Exemplo 10.5

Considerando duas alternativas mutuamente exclusivas, X e Y, e um custo do capital de 10% a.a., analisar qual é a preferível pelos métodos do VPL e da TIR.

Alternativa	Investimento	Fluxo de caixa/ano	Vida útil
X	-\$12	\$3,0	8 anos
Y	-\$13	\$2,5	8 anos

- Cálculo do VPL das alternativas:

$$VPL_X = -\$12 + \$3,0 \times a_{\overline{8}|10\%} = -\$12 + \$3,0 \times 5,33493 = \$4,01$$

$$VPL_Y = -\$13 + \$2,5 \times a_{\overline{8}|10\%} = -\$13 + \$2,5 \times 5,33493 = \$0,34$$

Como as alternativas têm igual duração, o critério do VPL pode ser aplicado diretamente na seleção. Logo, dado que $VPL_X > VPL_Y \Rightarrow X$ domina Y.

- Cálculo da TIR das alternativas:

$$-\$12 + \$3,0 \times a_{\overline{8}|TIR_X} = 0 \Rightarrow a_{\overline{8}|TIR_X} = \$4,0 \Rightarrow TIR_X = 18,62\%$$

$$-\$13 + \$2,5 \times a_{\overline{8}|TIR_Y} = 0 \Rightarrow a_{\overline{8}|TIR_Y} = \$5,2 \Rightarrow TIR_Y = 10,71\%$$

Neste exemplo, por coincidência, os dois métodos, VPL e TIR, selecionam a mesma alternativa, nesse caso, a alternativa X. Entretanto, como as alternativas são mutuamente exclusivas e têm escala diferente (investimento inicial diferente), o uso da TIR não é o método de seleção mais apropriado, pois pode levar a uma contradição em relação ao critério do VPL. De fato, pela escala diferente das alternativas, a decisão correta deve ser baseada na taxa interna de retorno do fluxo incremental (TIR do fluxo Y-X), tal como será visto na Seção 10.7.

► Exemplo 10.6

Considerando um custo do capital de 10% a.a., determinar o *pay-back* descontado para as alternativas X e Y.

Alternativa	Investimento	Fluxo de caixa/ano
X	-\$12	\$3,0
Y	-\$13	\$2,5

- Cálculo do *pay-back* descontado:

$$\$12 = \$3,0 \times a_{\overline{T}|10\%} \Rightarrow a_{\overline{T}|10\%} = \$4,0$$

$$\$13 = \$2,5 \times a_{\overline{T}|10\%} \Rightarrow a_{\overline{T}|10\%} = \$5,2$$

Para dado valor de T, o fator de valor presente da série uniforme não deve ser inferior a 4,0 e 5,2 para as alternativas X e Y, respectivamente. Como para $T = 6$ e $T = 8$ os valores dos fatores são 4,35526 e 5,33493, respectivamente, podemos concluir que $PB_X = 6$ e $PB_Y = 8$.

▶ Exemplo 10.7

Qual das alternativas mutuamente exclusivas, X ou Y, deve ser escolhida se o custo do capital for de 10% a.a.?

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
X	-\$10	\$6	\$6	
Y	-\$9	\$4	\$4	\$4

- Cálculo das anuidades equivalentes:

$$AE_X = \frac{VPL_X}{a_{\overline{2}|10\%}} = \frac{-\$10 + \$6 \times a_{\overline{2}|10\%}}{a_{\overline{2}|10\%}} = \frac{-\$10 + \$6 \times 1,73554}{1,73554} = \frac{\$0,4132}{1,73554} = \$0,2381$$

$$AE_Y = \frac{VPL_Y}{a_{\overline{3}|10\%}} = \frac{-\$9 + \$4 \times a_{\overline{3}|10\%}}{a_{\overline{3}|10\%}} = \frac{-\$9 + \$4 \times 2,48685}{2,48685} = \frac{\$0,9474}{2,48685} = \$0,3810$$

Considerando a duração diferente das alternativas, a decisão correta deve ser com base nas AEs. Logo, como $AE_Y > AE_X$, então a alternativa Y será preferível à alternativa X, pois possui a maior AE.

▶ Exemplo 10.8

Comparar as alternativas mutuamente exclusivas, R e S, de duração diferente. O custo do capital é de 10% a.a.

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL (10%)	TIR
R	-\$1.000	\$1.000	\$1.000	\$735,54	61,80%
S	-\$1.000	\$1.800	—	\$636,36	80,00%

Como pode ser observado, a seleção seria contraditória pelos métodos do VPL e da TIR. A seguir, as duas alternativas são comparadas sob duas hipóteses sobre a substituição da alternativa de menor duração (alternativa S): quando é possível a reposição idêntica e quando não é possível a reposição idêntica.

- **Quando é possível a reposição idêntica da alternativa S**

Supondo que as alternativas possam ser substituídas por outras idênticas ao término de seu prazo, podemos selecionar por meio da comparação das AEs:

$$AE_R = \frac{VPL_R}{a_{\overline{2}|10\%}} = \frac{-\$1.000 + \$1.000 \times a_{\overline{2}|10\%}}{a_{\overline{2}|10\%}} = \frac{-\$1.000 + \$1.000 \times 1,73554}{1,73554} = \$423,81/\text{ano}$$

$$AE_S = \frac{VPL_S}{a_{\overline{1}|10\%}} = \frac{-\$1.000 + \$1.800/1,10}{a_{\overline{1}|10\%}} = \frac{-\$1.000 + \$1.636,36}{0,90909} = \$700,00/\text{ano}$$

Como $AE_S > AE_R$, o indicado seria selecionar a alternativa S. A aplicação do método da anuidade equivalente (AE) supõe que as alternativas possam ser substituídas por outras idênticas ao término de seu respectivo prazo.

• Quando não é possível a reposição idêntica da alternativa S

Admitindo-se que ao término de seu prazo a alternativa de menor duração (alternativa S) não possa ser substituída por outra alternativa idêntica, o resultado da seleção das alternativas poderá ser diferente daquele indicado pelas AEs. Por exemplo, nessa impossibilidade, e de modo a igualar os prazos das alternativas, pode-se considerar que o fluxo de caixa gerado no ano 1 pela alternativa S seja reinvestido imediatamente, por um ano, no mercado de capitais, rendendo o custo de oportunidade do capital (10%). O quadro a seguir mostra o fluxo da alternativa R e o fluxo T, que é o resultado da soma dos fluxos de S e do reinvestimento.

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL (10%)
Alternativa R	-\$1.000	\$1.000	\$1.000	\$735,54
Alternativa S	-\$1.000	\$1.800		\$636,36
+ Reinvestimento		-\$1.800	\$1.980(*)	
= Fluxo T	-\$1.000	0	\$1.980	\$636,36

(*) $\$1.800 + 0,10 \times \1.800

Observa-se que, reinvestindo à taxa de 10% (custo do capital) o fluxo de caixa gerado no ano 1 pela alternativa S (\$1.800), consegue-se igualar os prazos das duas alternativas (de R e S), permitindo, dessa forma, o uso do VPL como critério de seleção. Logo, analisando o VPL do fluxo resultante (fluxo T), vemos que ele é menor que o VPL da alternativa R ($\$636,36 < \$735,54$) e concluímos, desse modo, que a alternativa R deve ser a selecionada. Não há forma de reinvestir o fluxo de caixa gerado por S no primeiro ano de modo que se obtenha um *pacote* de investimento (investimento em S + reinvestimento de \$1.800) que supere a alternativa R em termos de VPL.

Podemos concluir a partir dessa análise, admitindo que a alternativa S possa ser substituída por outra idêntica ao término de sua vida útil, que o método da anuidade equivalente (AE) é o adequado e seleciona a alternativa S. Entretanto, se não for possível essa substituição idêntica, a alternativa selecionada seria a R. O resultado da seleção é diferente quando não é possível admitir a possibilidade de reposição idêntica da alternativa S.

► Exemplo 10.9

O preço atual de um equipamento é de \$7.500. Ele tem cinco anos de vida útil e gera uma receita operacional de \$2.000 por ano. Pode ser usado até o término da vida útil ou substituído antes desse prazo por um novo equipamento idêntico e de mesmo valor. O quadro a seguir mostra os fluxos de caixa operacionais e os valores de revenda nos respectivos anos para equipamentos com diversos tempos de uso.

	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
Fluxo de caixa operacional	\$2.000	\$2.000	\$2.000	\$2.000	\$2.000
Valor de revenda	\$6.200	\$5.200	\$4.000	\$2.200	\$0

Considerando um custo do capital de 10% a.a., determinar o tempo ótimo para substituir o equipamento.

Dado que o equipamento pode funcionar um, dois, três, quatro ou cinco anos, de fato existem cinco alternativas mutuamente exclusivas e de diferentes durações. Logo, se admitirmos a possibilidade de substituição idêntica, a seleção poderá ser efetuada pela comparação das anuidades equivalentes (AE) das alternativas. A análise pode ser resumida no seguinte quadro:

Ano (n)	Fluxo	Fator $(1,10)^{-n}$	Substituição ao término do ano				
			1	2	3	4	5
1	2.000	0,90909	1.818	1.818	1.818	1.818	1.818
2	2.000	0,82645		1.653	1.653	1.653	1.653
3	2.000	0,75132			1.503	1.502	1.502
4	2.000	0,68301				1.366	1.366
5	2.000	0,62092					1.242
Valor presente do fluxo			1.818	3.471	4.974	6.340	7.582
Valor presente da revenda			5.636	4.298	3.004	1.503	0
Valor presente total			7.454	7.769	7.978	7.843	7.580
– Investimento			-7.500	-7.500	-7.500	-7.500	-7.500
Valor presente líquido			-46	269	478	343	80
Anuidade equivalente (AE)			-50,6	155,0	192,2	108,2	21,60

O quadro é autoexplicativo; entretanto, como ilustração, podemos calcular a AE supondo a substituição do equipamento ao término do segundo ano:

$$\begin{aligned} \text{VPL} &= \frac{\$2.000}{(1,10)} + \frac{\$2.000}{(1,10)^2} + \left(\frac{\$5.200}{(1,10)^2} \right) - \$7.500 \\ &= \$1.818 + \$1.653 + \$4.298 - \$7.500 = \$269 \\ \text{AE} &= \frac{\text{VPL}}{a_{\overline{2}|10\%}} = \frac{\$269}{1,73554} = \$155 \end{aligned}$$

Ao fim do terceiro ano:

$$\begin{aligned} \text{VPL} &= \frac{\$2.000}{(1,10)} + \frac{\$2.000}{(1,10)^2} + \frac{\$2.000}{(1,10)^3} + \left(\frac{\$4.000}{(1,10)^3} \right) - \$7.500 \\ &= \$1.818 + \$1.653 + \$1.503 + \$3.004 - \$7.500 = \$478 \\ \text{AE} &= \frac{\text{VPL}}{a_{\overline{3}|10\%}} = \frac{\$478}{2,48685} = \$192,20 \end{aligned}$$

O quadro mostra que a AE é maximizada, substituindo o equipamento ao final do terceiro ano.

► Exemplo 10.10

O quadro a seguir mostra diversos tamanhos possíveis para uma planta, com o investimento necessário e a produção para diversas escalas. Determinar o tamanho ótimo da planta.

Escala (i)	Investimento inicial	Produção (unidades)
1	\$120.000	10.000
2	\$145.000	12.000
3	\$170.000	13.500
4	\$180.000	15.000
5	\$200.000	15.500

O preço unitário de venda é de \$6/unidade, os custos operacionais são de \$0,80/unidade, a vida útil das plantas é de cinco anos e o custo do capital é de 10% a.a.

- Cálculo do VPL incremental:

Escala (i)	Investimento	Produção (unid.)	Fluxo de caixa (a)	Fluxo de caixa incremental (b)	Investimento incremental (c)	VPL incremental (d)
1	\$120.000	10.000	\$52.000			
2	\$145.000	12.000	\$62.400	\$10.400	\$25.000	\$14.424
3	\$170.000	13.500	\$70.200	\$7.800	\$25.000	\$4.568
4	\$180.000	15.000	\$78.000	\$7.800	\$10.000	\$19.568
5	\$200.000	15.500	\$80.600	\$2.600	\$20.000	-\$10.144

(a) $\text{Produção}_i \times (\$6 - \$0,80)$; (b) $\text{Fluxo de caixa}_i - \text{Fluxo de caixa}_{i-1}$; (c) $\text{Investimento}_i - \text{Investimento}_{i-1}$

(d) $\text{Fluxo de caixa incremental}_i \times \left(\frac{(1,10)^5 - 1}{(1,10)^5 \times 0,10} \right) - \text{Investimento incremental}_i$

A escala ótima é a escala 4, pois o investimento inicial de \$180.000 apresenta o maior VPL incremental. Cabe ressaltar que, alternativamente, também poderia ser aplicado o método da anuidade equivalente (AE), que nos levaria à mesma conclusão.

► Exemplo 10.11

Qual dos equipamentos, X ou Y, é mais adequado para realizar determinada operação? Considere a taxa mínima de atratividade igual a 10% a.a.

Equipamento	Custo inicial	Custo operacional anual	Vida útil
X	\$12	\$2,5/ano	3 anos
Y	\$32	\$2,0/ano	8 anos

- Custo anual equivalente para o equipamento X:

$$CAE_x = \frac{\text{Custo inicial}}{a_{\overline{3}|10\%}} + \text{Custo operacional/ano} = \frac{\$12}{2,48685} + \$2,50 = \$7,33/\text{ano}$$

- Custo anual equivalente para o equipamento Y:

$$CAE_Y = \frac{\text{Custo inicial}}{a_{\overline{8}|10\%}} + \text{Custo operacional/ano} = \frac{\$32}{5,33493} + \$2,00 = \$8/\text{ano}$$

Como $CAE_X < CAE_Y$, selecionamos X, pois possui o menor custo anual uniforme equivalente.

Observe que o CAE foi utilizado para selecionar a alternativa, pois as únicas informações são referentes aos custos.

▶ Exemplo 10.12

A Riolight pretende instalar um gerador de energia elétrica a um custo de \$10 milhões. Os custos operacionais projetados são de \$80.000/mês ao longo da vida útil do equipamento, que foi estimada em 120 meses. Considerando que a empresa requer uma rentabilidade mínima de 10% a.m., determinar o custo mensal que deve ser repassado aos usuários do equipamento. Ignorar os impostos.

O custo mensal que deve ser repassado aos clientes, de modo que cubra os custos operacionais e proporcione a rentabilidade mínima desejada à empresa pelo capital investido, é igual ao custo operacional mensal mais uma mensalidade uniforme equivalente calculada sobre o investimento inicial:

$$\begin{aligned} \text{Mensalidade uniforme} &= \text{Custo operacional/mês} + \frac{\text{Investimento}}{a_{\overline{120}|10\%}} \\ &= \$80.000 + \frac{\$10.000.000}{a_{\overline{120}|10\%}} = \$80.000 + \frac{\$10.000.000}{9,99989} = \$1.080.011/\text{mês} \end{aligned}$$

▶ Exemplo 10.13

Uma empresa estuda a implementação de um sistema de transporte de material dentro de sua planta industrial. Existem três alternativas possíveis:

- 1) *Sistema manual*: requer a contratação de uma grande equipe de trabalhadores ao custo fixo de \$1.050.000 por ano.
- 2) *Sistema de empilhadeiras*: requer a contratação de uma equipe menor de trabalhadores ao custo fixo de \$100.000 por ano, mais a compra de 50 máquinas empilhadeiras ao custo de \$40.000 cada. As empilhadeiras têm vida útil de quatro anos, com valor de recuperação de 10% do seu valor de aquisição. Os custos operacionais anuais desse sistema são de \$4.000 por ano para cada empilhadeira.
- 3) *Sistema de faixas transportadoras*: o sistema custa \$3.000.000, tem vida útil de sete anos, com um valor de recuperação de \$1.000.000. Como esse sistema é bastante automatizado, requer um grupo muito pequeno de trabalhadores ao custo fixo de \$50.000 por ano e gastos operacionais anuais de \$40.000.

Considerando-se um custo de oportunidade do capital de 25% a.a. e que os três sistemas gerem benefícios anuais iguais, pede-se analisar e determinar o sistema que deverá ser selecionado.

- Cálculo do custo anual equivalente para as três alternativas:

$$CAE_1 = \text{Salário/ano} = \$1.050.000/\text{ano}$$

$$\begin{aligned} CAE_2 &= \frac{\text{Custo inicial} - \text{Valor atual do valor de recuperação}}{a_{\overline{4}|25\%}} \\ &\quad + \text{Custo operacional/ano} + \text{Salário/ano} \\ &= \frac{50 \times \$40.000 - 0,10 \times (50 \times \$40.000)/(1,25)^4}{2,361600} + 50 \times \$4.000 + \$100.000 = \\ &= \$1.112.195/\text{ano} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CAE_3 &= \frac{\text{Custo inicial} - \text{Valor atual do valor de recuperação}}{a_{\overline{7}|25\%}} \\ &\quad + \text{Custo operacional/ano} + \text{Salário/ano} \\ &= \frac{\$3.000.000 - \$1.000.000/(1,25)^7}{3,161139} + \$4.000 + \$50.000 = \$972.683/\text{ano} \end{aligned}$$

$$\text{onde: } a_{\overline{4}|25\%} = \frac{(1,25)^4 - 1}{(1,25)^4 \times 0,25} = 2,361600 \quad \text{e} \quad a_{\overline{7}|25\%} = \frac{(1,25)^7 - 1}{(1,25)^7 \times 0,25} = 3,161139$$

Do ponto de vista econômico, o sistema escolhido deverá ser o sistema de faixas transportadoras, pois tem o menor CAE.

► Exemplo 10.14

Há cinco anos, uma empresa comprou uma máquina. Hoje, a empresa tem duas opções: operar essa máquina por mais quatro anos, ao término dos quais seu valor residual será zero, ou substituí-la hoje por uma máquina nova e mais moderna orçada em \$300.000, com vida útil de oito anos, ao término dos quais seu valor residual ou de liquidação será de 50% do custo de aquisição. Se for substituída, a máquina usada poderá ser vendida no mercado de equipamentos usados por \$40.000. O quadro a seguir mostra as informações sobre as duas alternativas:

Item	Alternativas	
	Manter máquina antiga (1)	Comprar máquina nova (2)
Custo de aquisição	–	\$300.000
Valor de liquidação	\$40.000	\$150.000
Gastos em seguros	\$24.000/ano	\$18.000/ano
Gasto de manutenção	\$20.000/ano	\$4.000/ano
Gasto anual total	\$44.000/ano	\$22.000/ano

Considerando-se um custo de oportunidade do capital de 10% a.a., pede-se analisar: a) qual é a melhor opção para a empresa; b) qual deveria ser o valor de aquisição da nova máquina de modo que fosse indiferente para empresa escolher uma ou outra alternativa?

a) A melhor opção pode ser determinada pela comparação dos CAEs das alternativas:

$$\text{CAE alternativa 1} = \text{Gasto anual} + \frac{\text{Valor de liquidação hoje}}{a_{\overline{7}|10\%}} = \$44.000/\text{ano} + \frac{\$40.000}{3,169865} = \$56.619/\text{ano}$$

$$\begin{aligned} \text{CAE alternativa 2} &= \text{Gasto anual} + \frac{\text{Custo de aquisição} - \text{Valor presente do valor de liquidação}}{a_{\overline{8}|10\%}} \\ &= \$22.000/\text{ano} + \frac{\$300.000 - \$150.000/(1,10)^8}{5,33493} = \$65.117/\text{ano} \end{aligned}$$

Na alternativa 1, o valor de liquidação representa um custo de oportunidade perdido que deve ser somado ao gasto anual. No caso da alternativa 2, o custo de oportunidade perdido é representado pela diferença entre o custo de aquisição e o valor presente do valor de liquidação. Como o CAE da opção 1 é menor que o CAE da opção 2, é melhor manter a máquina antiga.

b) O cálculo do valor de aquisição da máquina nova que possibilita que a empresa seja indiferente entre as duas alternativas pode ser obtido igualando os CAES das duas opções:

$$\overbrace{\$22.000/\text{ano} + \frac{\text{VA} - \frac{0,5 \times \text{VA}}{(1,10)^8}}{5,33493}}^{\text{CAE alternativa 2}} = \overbrace{\frac{\text{CAE alternativa 1}}{5,33493}}^{\text{CAE alternativa 1}} \Rightarrow \text{VA (valor de aquisição)} = \$240.875$$

► Exemplo 10.15

Um equipamento com custo de aquisição de \$100.000 tem vida útil de três anos e valor residual que depende do número de anos de uso: \$60.000, \$15.000 e \$10.000, respectivamente, para um ano, dois anos e três anos de uso. Os custos operacionais projetados são de \$20.000/ano, \$28.000/ano e \$42.000/ano, respectivamente, para cada ano de operação. Determinar o tempo ótimo de substituição, considerando um custo do capital de 10% a.a.

Como o equipamento pode funcionar por um, dois ou três anos, existem implícitas no problema três alternativas mutuamente exclusivas de diferentes durações. A seguir, calculamos os CAEs para essas três alternativas, ou seja, para substituir o equipamento ao término do primeiro, segundo ou terceiro anos de uso:

$$\text{CAE}_{1^{\text{º}}\text{ano}} = \frac{1}{a_{\overline{1}|10\%}} \times \left[\$100.000 + \frac{\$20.000}{(1,10)} - \frac{\$60.000}{(1,10)} \right] = \$70.000/\text{ano}$$

$$\text{CAE}_{2^{\text{º}}\text{ano}} = \frac{1}{a_{\overline{2}|10\%}} \times \left[\$100.000 + \frac{\$20.000}{(1,10)} + \frac{\$28.000}{(1,10)^2} - \frac{\$15.000}{(1,10)^2} \right] = \$74.286/\text{ano}$$

$$\text{CAE}_{3^{\text{º}}\text{ano}} = \frac{1}{a_{\overline{3}|10\%}} \times \left[\$100.000 + \frac{\$20.000}{(1,10)} + \frac{\$28.000}{(1,10)^2} + \frac{\$42.000}{(1,10)^3} - \frac{\$10.000}{(1,10)^3} \right] = \$66.496/\text{ano}$$

Como o menor CAE é dado no terceiro ano, este é o período ótimo de substituição do equipamento.

► Exemplo 10.16

Uma empresa de energia elétrica planeja a construção de uma linha de transmissão. A informação levantada pela gerência de obras é mostrada no quadro a seguir:

Voltagem	Investimento (US\$/km)	Custos de manutenção US\$/ano/km	Perdas de energia US\$/ano/km
54	8.400	300	3.000
110	10.200	300	2.125
220	12.000	300	1.785
500	18.000	300	1.410

A vida econômica de linhas de alta tensão é de 25 anos. Considerando um custo do capital de 20% a.a., determinar a linha mais adequada.

- Cálculo do custo anual equivalente (CAE) para as quatro alternativas:

Voltagem	Investimento	Custos + perdas	CAE (*)
54	8.400	3.300	4.998
110	10.200	2.425	4.487
220	12.000	2.085	4.510
500	18.000	1.710	5.348

$$(*) (\text{Custos de manutenção} + \text{Perdas}) + \text{Investimento} / \left(\frac{(1,20)^{25} - 1}{(1,20)^{25} \times 0,20} \right).$$

A escala ótima é de 110 kW, pois tem o menor CAE.

► Exemplo 10.17

Uma empresa analisa a viabilidade econômica de um projeto de automação de sua linha de produção. Basicamente, o projeto consiste em instalar um equipamento que custa \$80.000 e propiciará uma diminuição de custos da ordem de \$20.000 por ano (antes do IR). O equipamento tem vida útil de cinco anos, sendo depreciado integralmente nesse período sem valor residual. A alíquota de IR (imposto de renda) é de 34% e o custo do capital, de 10% a.a. Analisar a viabilidade econômica do projeto.

Fluxo de caixa livre

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
- Investimentos de capital	-80.000					
+ Redução de custos		20.000	20.000	20.000	20.000	20.000
- Depreciação		-16.000	-16.000	-16.000	-16.000	-16.000
Lair		4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
IR (34%)		-1.360	-1.360	-1.360	-1.360	-1.360
+ Depreciação		16.000	16.000	16.000	16.000	16.000
Fluxo de caixa livre	-80.000	18.640	18.640	18.640	18.640	18.640

$$\begin{aligned} \text{VPL} &= -\$80.000 + \$18.640 \times a_{5|10\%} = \$18.640 \times 3,79079 = -\$9.340 < 0 \\ -\$80.000 + \frac{\$18.640}{(1 + \text{TIR})} + \frac{\$18.640}{(1 + \text{TIR})^2} + \frac{\$18.640}{(1 + \text{TIR})^3} + \frac{\$18.640}{(1 + \text{TIR})^4} + \frac{\$18.640}{(1 + \text{TIR})^5} &= 0 \\ \Rightarrow \text{TIR} &= 5,32\% < 10\% \end{aligned}$$

Por ambos os critérios, VPL e TIR, o projeto é economicamente inviável.

10.7 Alternativas mutuamente exclusivas

A maioria dos investimentos empresariais tende a ser independente, quer dizer, a escolha de qualquer um deles não impede a escolha de outro. Contudo, existem circunstâncias nas quais as alternativas competem entre si em seus propósitos específicos. Essas alternativas são chamadas de alternativas mutuamente excludentes ou mutuamente exclusivas. Nesse tipo de alternativa, se uma for escolhida, as outras serão eliminadas por essa única decisão. Tipicamente, por exemplo, isso ocorre quando são analisadas duas formas alternativas de resolver o mesmo problema.

Suponhamos que uma empresa analise três alternativas de investimento: A, B e C. O custo do capital adequado é de 9%, e a vida útil das alternativas é de sete anos. Admitamos que a qualidade das estimativas e a incerteza dos resultados sejam as mesmas nos três casos. As principais informações sobre as três alternativas são apresentadas no quadro a seguir:

Alternativa	Investimento líquido	Fluxo de caixa anual	Valor de liquidação (no 7º ano)	VPL	TIR	Índice custo-benefício (B/C)
A	\$480	\$113	\$149	\$170	17,8%	1,35
B	\$620	\$125	\$153	\$93	12,9%	1,15
C	\$750	\$165	\$204	\$192	15,5%	1,26

A primeira observação é que as três alternativas atendem à rentabilidade mínima desejada (9%) conforme as TIRs apontam, embora em graus diferentes. A questão agora é selecionar a melhor das três. Os métodos da TIR e do índice custo-benefício favorecem a alternativa A. Entretanto, do ponto de vista do VPL, a alternativa C é claramente a melhor. Caso apenas uma delas pudesse ser escolhida, isso favoreceria a alternativa C, que apresenta o maior VPL. Mas esta é também a alternativa mais cara, e sua capacidade de gerar valor por unidade monetária investida (índice B/C) é um pouco menor que a da alternativa A. É consistente a escolha da alternativa C, conforme determina o método do VPL?

Um procedimento usual na seleção e comparação dos aspectos econômicos de alternativas mutuamente exclusivas é examinar o benefício obtido com uma mudança de investimentos menores para maiores. Em nosso exemplo, o investimento adicional ou incremental para se passar da alternativa A para a alternativa B é de \$140 (de \$480 para \$620), mas ele reduz o VPL em -\$77 (de \$170 para \$93). Isso não é economicamente desejável, portanto descartamos a alternativa B. Por outro lado, mudando da alternativa A para a alternativa C, o investimento incremental adicional necessário é de \$270 (de \$480 para \$750), o que aumenta o VPL em +\$22 (de \$170 para \$192). O retorno desse inves-

timento adicional ou incremental excede a rentabilidade desejada pela empresa, pois sua TIR é de 11,16%. Caso a empresa não disponha de outras possibilidades de aplicação (em igualdade de condições) que possam trazer um retorno maior que 11,16%, a alternativa C deverá ser a preferida. Dessa forma, podemos ver que, caso a análise seja realizada com base na TIR do fluxo incremental resultante da mudança de uma alternativa para outra, a seleção será consistente com a escolha determinada pelo método do VPL. Em geral, os problemas em orçamentação de capital estão mais ligados à seleção de uma ou mais alternativas dentre um conjunto de alternativas disponíveis, envolvendo uma comparação que dá origem ao problema da escolha.

10.7.1 Problemas da TIR na seleção de alternativas mutuamente exclusivas

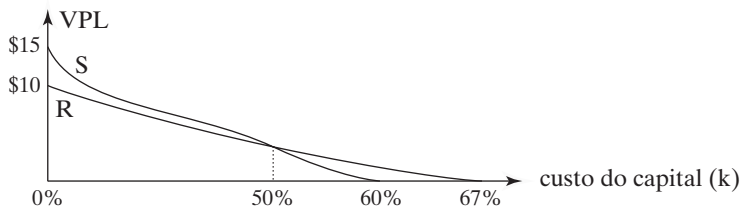
O método da TIR possui a vantagem de expressar os resultados em termos percentuais fáceis de ser comparados. Comparado com o VPL, que fornece um valor monetário, o método da TIR nos brinda com uma porcentagem mais compreensível para a maioria dos tomadores de decisão. Contudo, a TIR apresenta uma série de limitações e contradições que devem ser compreendidas se quisermos usá-la corretamente como método decisório na seleção de alternativas de investimento. A seguir, analisaremos a problemática implícita no uso desse método na análise de alternativas de investimento.

10.7.1.1 O problema do reinvestimento

Um problema ou limitação da TIR é conhecido como *problema do reinvestimento*. No intuito de explicar essa problemática, consideremos as alternativas R e S a seguir:

Alternativa	Investimento	Retorno	TIR	VPL (10%)
R	-\$15	\$25	67%	\$7,73
S	-\$25	\$40	60%	\$11,36

A próxima figura mostra a relação funcional entre o VPL das alternativas e o custo do capital.



O ponto em que as duas curvas se entrecortam (50%) é conhecido como taxa incremental de Fisher, em homenagem ao grande economista Irving Fisher, um dos primeiros a levantar a questão sobre o conflito que ocorre quando se avaliam projetos mutuamente exclusivos. Se aplicarmos o método da TIR como critério de decisão, a alternativa R será selecionada, pois tem a maior TIR. Entretanto, pelo critério do VPL, a seleção dependerá do fato de o custo do capital ser maior ou menor que a taxa incremental de Fisher. Se o custo do capital for menor que a taxa incremental de Fisher, então o projeto S será preferível; caso contrário, o projeto R será preferível. Como o custo do capital é de 10%, o projeto S será escolhido, pois para essa taxa temos que $VPL_S > VPL_R$.

Constata-se que na ordenação de projetos mutuamente exclusivos a TIR pode conduzir a uma seleção inconsistente e contraditória em relação ao método do VPL. Essa divergência decorre, entre outros fatores, da diferença nas considerações de cada método em torno do reinvestimento dos fluxos de caixa gerados pelo projeto ao longo de sua vida útil. A questão é: quanto os fluxos de caixa decorrentes do projeto renderão ao serem subsequentemente reinvestidos em outros projetos de mesmo risco? A TIR considera implicitamente que esses fluxos renderão a própria TIR. Ora, não há por que imaginar que os fluxos de caixa de um projeto com TIR de 15% não possam ser reinvestidos senão a 15%. Do ponto de vista da racionalidade econômica, é pouco realista admitir que os fluxos de caixa gerados pelo projeto tenham de ser reinvestidos à própria TIR.

Se o custo do capital for corretamente estimado, então poderá ser usado como taxa mínima de retorno exigida para o projeto, já que as forças competitivas assegurarão que no longo prazo essa taxa seja igual ao custo do capital. Assim, no longo prazo, os fluxos de caixa gerados pelo projeto rendem o custo de oportunidade do capital, e não a TIR. Podemos admitir que, pelas suposições implícitas feitas sobre o reinvestimento dos fluxos de caixa gerados pelo projeto, o VPL seja um método mais adequado que a TIR, pois supõe que os fluxos renderão o custo de oportunidade do capital. Dessa maneira, a racionalidade econômica atrás da suposição sobre reinvestimento é mais consistente e realista no método do VPL do que no método da TIR.

Por ser muito controvertida a questão do reinvestimento implícita no método da TIR, que supõe implicitamente que os fluxos sejam reinvestidos à própria TIR, o exemplo seguinte pretende esclarecer ainda mais o assunto.

Supnhamos que uma alternativa de investimento tenha o seguinte fluxo de caixa líquido:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Investimento	-\$10.000		
Receitas		\$15.762	\$15.762
- Custos		-\$10.000	-\$10.000
Fluxo de caixa líquido	-\$10.000	\$5.762	\$5.762

Podemos calcular a TIR a partir da seguinte equação:

$$-\$10.000 + \frac{\$5.762}{(1 + \text{TIR})^1} + \frac{\$5.762}{(1 + \text{TIR})^2} = 0 \Rightarrow \text{TIR} = 10\%$$

Caso o capital aplicado (\$10.000) rendesse a TIR (10%), ao término do primeiro ano resultaria em:

$$\$10.000 \times 1,10 = \$11.000$$

Se retirarmos a renda econômica (fluxo de caixa) obtida no primeiro ano, o capital remanescente será:

$$\$11.000 - \$5.762 = \$5.238$$

Caso esse capital remanescente (\$5.238) continue rendendo a TIR (10%), ao término do segundo ano teremos:

$$\$5.238 \times 1,10 = \$5.762$$

Se retirarmos a renda econômica (fluxo de caixa) obtida no segundo ano, o novo capital remanescente será:

$$\$5.762 - \$5.762 = 0$$

Esse exemplo mostra que a TIR considera somente o dinheiro que fica reaplicado no projeto, e esse dinheiro rende a própria TIR.

10.7.1.2 O problema na seleção de projetos mutuamente exclusivos de escala diferente: taxa incremental de Fisher

O quadro a seguir apresenta duas alternativas mutuamente exclusivas, F e G, da mesma escala (igual investimento) e da mesma duração (somente um período):

Alternativa	Investimento	Retorno	TIR	VPL (10%)
F	-\$10	\$20	100%	\$8,18
G	-\$10	\$35	250%	\$21,82

- Cálculo do valor presente líquido das alternativas:

$$VPL_F = -\$10 + \$20 / 1,10 = \$8,18 > 0$$

$$VPL_G = -\$10 + \$35 / 1,10 = \$21,82 > 0$$

- Cálculo da taxa interna de retorno das alternativas:

$$-\$10 + \$20 / (1 + TIR) = 0 \Rightarrow TIR_F = 1,00 = 100\% > 10\%$$

$$-\$10 + \$35 / (1 + TIR) = 0 \Rightarrow TIR_G = 2,50 = 250\% > 10\%$$

Se forem independentes, e não existindo restrições de capital, ambas as alternativas serão aceitas tanto pelo critério do VPL quanto pelo critério da TIR, dado que os VPLs são positivos e as TIRs excedem o custo do capital. Entretanto, como as alternativas são mutuamente exclusivas, devemos escolher somente uma delas. Vejamos qual:

$$\text{Pela TIR: } TIR_G = 250\% > TIR_F = 100\% \Rightarrow \text{selecionar G}$$

$$\text{Pelo VPL: } VPL_G = \$21,82 > VPL_F = \$8,18 \Rightarrow \text{selecionar G}$$

Dado que a escala e o *timing* das alternativas são similares, os dois critérios coincidem na escolha da alternativa G. Entretanto, o uso da TIR pode levar a inconsistências decisórias na escolha entre alternativas mutuamente exclusivas de tamanho (escala) diferente. Como a TIR tem seus resultados expressos em termos relativos (porcentagem), tende a favorecer alternativas de menor escala, que possuem maiores chances de produzir um retorno percentual mais elevado que alternativas de maior escala. Para podermos observar melhor esse problema, o quadro a seguir mostra as mesmas alternativas, F e G, mas agora a alternativa G apresenta escala maior (investimento de \$20) em relação a F (investimento de \$10).

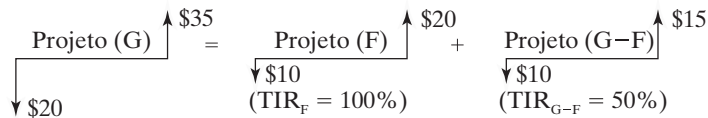
Alternativa	Investimento	Retorno	TIR	VPL (10%)
F	-\$10	\$20	100%	\$8,18
G	-\$20	\$35	75%	\$11,82
G-F (fluxo incremental)	-\$10	\$15	50%	\$3,64

Nota-se que, quando a escala das alternativas não é a mesma, ocorre um conflito entre os dois métodos de seleção. Pela TIR seria aceita a alternativa F, enquanto pelo VPL seria

preferível a alternativa G. De modo geral, o VPL é o método a seguir quando há diferença de tamanho entre projetos mutuamente exclusivos. Contudo, se for o caso de se usar um critério baseado em porcentagem, uma maneira de evitar a contradição entre o VPL e a TIR na comparação de alternativas mutuamente exclusivas de escala diferente seria o uso da TIR do fluxo incremental (TIR do fluxo G-F), também chamada taxa incremental de Fisher. No presente exemplo, o investimento incremental (G-F) apresenta taxa interna de retorno (TIR_{G-F}) de 50%, que, sendo maior que o custo do capital, indica que o projeto G (alternativa de maior escala) é preferível ao projeto F (alternativa de menor escala), eliminando-se dessa maneira a contradição entre o VPL e a TIR.

Analisemos mais explicitamente a abordagem do fluxo incremental, ou taxa incremental de Fisher. Podemos considerar que o projeto G (de maior escala) é igual à soma do projeto F (de menor escala) mais um incremento (de tamanho G-F). Logo, se o projeto F for justificado economicamente (provado que $TIR_F > k$), bastará justificar o incremento (provar que $TIR_{G-F} > k$) para justificar economicamente o projeto de maior escala (projeto G) e, conseqüentemente, preferir G a F.

Esquemáticamente:



Logo, como foi provado que $TIR_F > 10\%$ e que $TIR_{G-F} > 10\% \Rightarrow G$ domina F.

A análise anterior mostra que a simples comparação das TIRs das alternativas individuais nos conduz a uma seleção inconsistente. A seleção deverá ser feita analisando-se a taxa interna de retorno do fluxo incremental (TIR_{G-F}). Na prática, o processo se resume a observar se a TIR_{G-F} é ou não maior que o custo do capital. Tratando-se de fluxos negativos iniciais, seguidos de fluxos positivos (característica dos projetos de investimento), se a TIR_{G-F} for maior que o custo do capital, então a alternativa de maior escala será preferível; caso contrário, a de menor escala será selecionada. Para fluxos positivos iniciais, seguidos de fluxos negativos (característica dos projetos de financiamento), a análise será inversa.

10.7.1.3 O problema da distribuição dos fluxos de caixa no tempo

Quando os fluxos de caixa de duas alternativas mutuamente exclusivas se distribuem de forma diferente no tempo, pode surgir uma contradição entre os métodos do VPL e da TIR. A contradição se deve às suposições implícitas nos dois critérios em relação à taxa de reinvestimento. No quadro a seguir, as alternativas mutuamente exclusivas X e Y têm a mesma escala (investimentos iguais), mas seus fluxos de caixa são distribuídos de modo diferente no tempo. Em X, as entradas de caixa estão mais concentradas no final, enquanto em Y estão mais concentradas no início.

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL (10%)	TIR
X	-\$100,00	\$20,00	\$120,00	\$17,36	20,00%
Y	-\$100,00	\$100,00	\$31,25	\$16,74	25,00%
X-Y (fluxo incremental)	0,00	-\$80,00	\$88,75	\$0,62	10,94%

Observa-se que o VPL e a TIR levam a resultados diferentes e contraditórios. A contradição pode ser evitada selecionando-se as alternativas por meio da TIR do

fluxo incremental ou taxa incremental de Fisher (TIR do fluxo X-Y). Como a TIR_{X-Y} é maior que o custo do capital ($10,94\% > 10\%$), então a alternativa X deve ser selecionada. Esse resultado é consistente com a escolha do VPL. De modo geral, a regra decisória do VPL é a melhor regra a seguir quando há diferença na distribuição do fluxo de alternativas mutuamente exclusivas. Entretanto, um ponto a ser considerado é que o VPL não revela muita coisa a respeito da rentabilidade das alternativas, pois duas alternativas podem ter o mesmo VPL e uma delas representar um investimento substancialmente maior em relação à outra. O quadro a seguir mostra as alternativas mutuamente exclusivas A e B.

Alternativa	Investimento	Retorno	TIR	VPL (10%)
A	-\$100	+\$120	20,00%	+\$9,09
B	-\$10.000	+\$11.010	10,10%	+\$9,09

Notemos que a alternativa A requer um investimento muito menor que a alternativa B, mas os VPLs são os mesmos. Esse exemplo mostra que as duas alternativas terão de ser vistas e analisadas diferentemente, permitindo-nos concluir que a aplicação do VPL não dá por encerrada a discussão sobre análise e seleção de alternativas de investimento, mas proporciona um sólido ponto de partida.

10.7.1.4 O problema das múltiplas taxas internas de retorno

De acordo com o comportamento de seu fluxo de caixa, os projetos podem ser divididos em projetos de fluxo convencional e de fluxo não convencional. Os projetos de fluxo convencional se caracterizam por terem um fluxo negativo inicial (desembolso inicial) seguido de um ou mais fluxos positivos, por exemplo: $- + + + +$. Os de fluxo não convencional têm fluxos positivos e negativos de maneira alternada, por exemplo: $- + + - - -$.

Uma dificuldade com o método da TIR deriva do fato de que, contrariamente ao que parece, ela pode não ser única quando o fluxo de caixa é do tipo não convencional, pois, nesse caso, podem ocorrer múltiplas taxas internas de retorno como resultado da regra cartesiana: *o número de raízes reais positivas de um polinômio é no máximo igual ao número de mudanças de sinal verificadas na sequência de coeficientes do polinômio*. Isso equivale a dizer que o número de TIRs associadas a uma sequência de fluxos de caixa é no máximo igual ao número de mudanças de sinal verificadas nessa sequência. Assim, é possível, inclusive, encontrar fluxos de caixa que resultam em raízes imaginárias sem nenhuma interpretação econômica possível ou válida.

Lorie e Savage¹ estão entre os primeiros autores a levantar esse problema com a TIR, assinalando que, sob certas condições, o perfil do fluxo de caixa poderia apresentar uma evolução que dificultaria a aplicação da TIR como critério decisório. Esses autores tomam como ilustração o clássico exemplo do caso da substituição de uma estação de bombeamento de petróleo, atualmente em uso, por outra mais potente, que permite uma extração mais rápida das reservas petrolíferas do campo explorado. Um exemplo com valores poderia ser o seguinte: a substituição exigiria um desembolso inicial de \$1.600 e permitiria esgotar o lençol de petróleo em um único ano, obtendo-se uma entrada líquida de caixa da ordem de \$20.000, enquanto a não substituição do projeto não levaria a nenhum novo investimento, permitindo

¹ Lorie e Savage. "Three problems in rationing capital". *Journal of Business*, out. 1955.

o esgotamento do lençol em dois anos e proporcionando, em cada um desses dois anos, entradas de caixa da ordem de \$10.000. O quadro a seguir mostra as duas alternativas com seus fluxos de caixa e também o fluxo incremental.

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL
Sem substituição (S)	0	\$10.000	\$10.000	
Com substituição (C)	-\$1.600	\$20.000	—	
Fluxo incremental (C - S)	-\$1.600	\$10.000	-\$10.000	-\$733,55

Como as duas alternativas (substituir e não substituir) são mutuamente exclusivas, aparentemente qualquer divergência e contradição na seleção pelo VPL e pela TIR seriam evitadas usando-se a TIR do fluxo incremental (taxa incremental de Fisher). Calculemos essa taxa:

$$\begin{aligned} \text{VPL} &= -\$1.600 + \frac{\$10.000}{(1 + \text{TIR}_{C-S})} - \frac{\$10.000}{(1 + \text{TIR}_{C-S})^2} = 0 \\ \$1.600 (1 + \text{TIR}_{C-S})^2 - \$10.000 (1 + \text{TIR}_{C-S}) + \$10.000 &= 0 \end{aligned}$$

A forma geral da equação quadrática anterior é: $aX^2 + bX + C$. Sua resolução é:

$$\begin{aligned} X &= (1 + \text{TIR}_{C-S}) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-(-10.000) \pm \sqrt{(-10.000)^2 - 4 \times 1.600 \times 10.000}}{2 \times 1.600} = \frac{10.000 \pm 6.000}{3.200} \\ &\Rightarrow \text{TIR}_{C-S} = 25\% \quad \text{e} \quad \text{TIR}_{C-S} = 400\% \end{aligned}$$

Percebem-se duas taxas internas de retorno: 25% e 400%. Qual das duas deve ser usada como TIR? Se o custo do capital for de 10%, poderíamos concluir que a substituição é rentável? À primeira vista, sim, uma vez que as duas TIRs são superiores a essa taxa. Entretanto, a essa taxa, o VPL do fluxo incremental (C - S) seria -\$773,55, indicando uma redução do valor da empresa se a substituição for realizada. Dessa maneira, a adoção da TIR, mesmo do fluxo incremental, não parece ser muito indicada quando nos defrontamos com fluxos suscetíveis de apresentar múltiplas TIRs. Esse tipo de insuficiência relativa ao critério da TIR levou vários autores a propor pura e simplesmente a adoção do critério do VPL sempre que surgir o caso de TIRs múltiplas. Outros autores, como Teichröew, Robichek e Montalbano² e Solomon³, tentaram resgatar o método da TIR nesse tipo de situação propondo determinados procedimentos, mas a fraca racionalidade econômica e a grande dose de subjetividade de tais métodos não recomendam seu uso.⁴

² Teichröew, Robichek e Montalbano. "Mathematical analysis of rates of return under certainty". *Management science*, jan. 1965.

³ Solomon, E. "The arithmetic of capital budgeting decisions". *Journal of Business*, abr. 1956.

⁴ Foi proposta a TIR modificada (TIRM), calculada trazendo-se para o valor presente os fluxos negativos e para o valor futuro, os positivos. Para atualizar os fluxos, esse critério exige que se estipulem taxas de financiamento e de reinvestimento que acrescentam subjetividades adicionais à análise, o que diminui ou anula qualquer ganho palpado por seus defensores.

Podemos, ainda, encontrar fluxos com TIR indefinida, por exemplo, a TIR do fluxo: +100, -200, +150:

$$100 - \frac{200}{(1 + \text{TIR})} + \frac{150}{(1 + \text{TIR})^2} = 0 \quad 100(1 + \text{TIR})^2 - 200(1 + \text{TIR}) + 150 = 0$$

$$\text{fazendo } X = (1 + \text{TIR}): \quad 100X^2 - 200X + 150 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática do tipo $aX^2 + bX + c = 0$:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-200) \pm \sqrt{(-200)^2 - 4 \times 100 \times 150}}{2 \times 100} =$$

$$= \frac{200 \pm \sqrt{-20.000}}{200} = 1 \pm \sqrt{-0,5}$$

$$\text{Logo: } (1 + \text{TIR}) = 1 \pm \sqrt{-0,5} \Rightarrow \text{TIR} = \pm \sqrt{-0,5}$$

A solução da TIR é um número imaginário, portanto inconsistente para o propósito de análise econômica e seleção de alternativas de investimento.

Mas o problema não termina. Nas alternativas A e B do quadro a seguir, presenciamos duas mudanças de sinal, entretanto encontramos somente uma TIR para cada uma delas: devemos lembrar que o número de mudanças de sinal no fluxo de caixa indica o número máximo de TIRs, mas não necessariamente o número real de TIRs.

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	TIR
A	-\$1.000	\$1.400	-\$100	—	—	32,45%
B	-\$1.000	\$400	\$400	-\$100	\$500	8,07%

Exemplos de aplicação

Exemplo 10.18

Considerando um custo do capital de 12% a.a., avaliar pelo método do VPL, TIR e TIR incremental as seguintes alternativas mutuamente exclusivas:

Alternativa	Investimento	Retorno
A	-\$10.000	\$12.000
B	-\$15.000	\$17.700
B - A	-\$5.000	\$5.700

- Avaliação pelo método do VPL:

$$\text{VPL}_A = -\$10.000 + \frac{\$12.000}{1,12} = \$714,29$$

$$\text{VPL}_B = -\$15.000 + \frac{\$17.700}{1,12} = \$803,57$$

Como $\text{VPL}_B > \text{VPL}_A \Rightarrow B$ domina A

- Avaliação pela TIR das alternativas:

$$\text{TIR}_A = \frac{\$12.000}{\$10.000} - 1 = 20\%$$

$$\text{TIR}_B = \frac{\$17.700}{\$15.000} - 1 = 18\%$$

Como $\text{TIR}_A > \text{TIR}_B \Rightarrow A$ domina B

A seleção pela TIR indica a dominância da alternativa A, mas percebe-se que essa escolha seria inconsistente e contraditória em relação à seleção dada pelo VPL.

Se a TIR for calculada sobre o fluxo incremental (B - A), a seleção determinada pelos dois critérios, VPL e TIR, será a mesma. A TIR do fluxo incremental é a seguinte:

$$TIR_{B-A} = \frac{\$5.700}{\$5.000} - 1 = 14\% > (k = 12\%) \Rightarrow \text{selecionar B}$$

Como a TIR do fluxo incremental (TIR_{B-A}) é maior que o custo do capital, a alternativa de maior escala (B) domina a de menor escala (A). Observe que o fluxo incremental pode ser visto também como um projeto de investimento, pois é efetuado um desembolso inicial de \$5.000 no ano 0, seguido de um recebimento de \$5.700 no ano 1. Assim, a TIR_{B-A} representa a *rentabilidade efetiva* desse projeto de investimento. Se essa taxa for maior que o custo do capital, então a alternativa B dominará a alternativa A. Podemos concluir que, se a análise for realizada com base na TIR do fluxo incremental, a seleção será consistente com a seleção determinada pelo VPL.

► Exemplo 10.19

A um custo de oportunidade do capital de 10% a.a., analisar as alternativas de investimento mutuamente exclusivas A e B mostradas no quadro a seguir:

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	TIR	VPL (10%)
A	-\$100	\$80	\$80	37,9%	\$38,8
B	-\$80	\$65	\$65	39,5%	\$32,8
A - B	-\$20	\$15	\$15	31,87%	

A seleção pela TIR e pelo VPL das alternativas é contraditória. A TIR seleciona a alternativa B, e o VPL seleciona a A. Caso a análise seja feita com base na TIR do fluxo incremental (TIF_{A-B}), a alternativa selecionada será A, pois essa taxa é maior que o custo do capital ($31,87\% > 10\%$).

Caso a alternativa B seja selecionada, haverá um excedente de capital (\$20) que renderá o custo do capital (10%). Logo, uma maneira alternativa de analisar o problema é observar se a alternativa B, somada a outra alternativa que consista na aplicação do excedente, tem ou não uma TIR superior a 31,87%. Imaginemos três modalidades diferentes de aplicar o excedente (x, y e w), todas elas rendendo o custo do capital (10%), ou seja, com VPL nulo:

Modalidade	Ano 0	Ano 1	Ano 2	TIR	VPL (10%)
x	-\$20	\$2	\$22	10,0%	\$0,0
y	-\$20	\$11,5238	\$11,5238	10,0%	\$0,0
w	-\$20	\$22	\$0	10,0%	\$0,0

Se a alternativa B for agregada a essas três modalidades e analisada como uma combinação só, teremos:

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	TIR	VPL (10%)
B	-80	65	65	39,5%	32,8
x	-20	2	22	10,0%	0,0
(B + x)	-100	67	87	32,6%	

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	TIR	VPL (10%)
B	-80	65	65	39,5%	32,8
y	-20	11,5238	11,5238	10,0%	0,0
(B + y)	-100	76,5238	76,5238	33,74%	

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	TIR	VPL (10%)
B	-80	65	65	39,5%	32,8
w	-20	22	0	10,0%	0,0
(B + w)	-100	87	65	35,11%	

Ou seja, não há maneira de combinar a alternativa B com diversas modalidades de aplicar o excedente para que a alternativa resultante tenha uma rentabilidade superior à rentabilidade de A (37,9%). Conclui-se, assim, que a alternativa A é preferível à alternativa B.

► **Exemplo 10.20**

Consideremos duas alternativas mutuamente exclusivas, as duas com vida útil de cinco anos, custo do capital de 10% e os seguintes custos iniciais de aquisição, custos operacionais anuais e valores de revenda ao término da vida útil:

Alternativa	Custo inicial (em t = 0)	Custo operacional / ano (em t = 1, ..., 5)	Valor de revenda (em t = 5)
A	-\$6	-\$8	\$0
B	-\$30	-\$2	\$10

Pede-se selecionar a melhor alternativa usando como critério a TIR dos fluxos incrementais. Com as informações obtidas, podemos montar o seguinte quadro com os fluxos de caixa:

Fluxo de caixa (\$)

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	TIR
A	-6	-8	-8	-8	-8	-8	
B	-30	-2	-2	-2	-2	8	
A - B	24	-6	-6	-6	-6	-16	16,62%
B - A	-24	6	6	6	6	16	16,62%

O fluxo B - A pode ser visto como um projeto de investimento, pois aplica-se um capital no ano 0 (-\$24), seguido de fluxos positivos posteriores. O fluxo A - B pode ser visto como projeto de financiamento, pois levanta-se um empréstimo no ano 0 (+\$24) seguido de fluxos negativos posteriores.

Caso a TIR_{B-A} seja maior que o custo do capital, a alternativa que representa o *minuendo* é melhor:

$$(TIR_{B-A} = 16,62\%) > 10\% \Rightarrow \text{selecionar a alternativa B}$$

Caso a TIR_{A-B} seja maior que o custo do capital, a alternativa que representa o *subtraendo* é melhor:

$$(TIR_{A-B} = 16,62\%) > 10\% \Rightarrow \text{selecionar a alternativa B}$$

Assim, analisando as TIRs incrementais nas duas maneiras possíveis, podemos concluir que a melhor alternativa é B. Essa mesma seleção, se usássemos o custo anual equivalente como critério de seleção, resultaria em:

$$CAE_B = \$8,28/\text{ano} < CAE_A = \$9,58/\text{ano}$$

10.8 Ranking e seleção de alternativas de investimento — racionamento de capital

A hierarquização de um conjunto de alternativas de investimento pode ser tratada em duas situações: a primeira refere-se ao caso em que não há restrição de capital no financiamento da carteira de projetos, e a segunda, ao caso em que existe restrição na disponibilidade de capitais. No caso da não existência de restrição de capital, os projetos podem ser hierarquizados pelo VPL, enquanto, se houver restrição de capital ou financiamento limitado, não será possível usar somente o VPL, mas se tornará necessária alguma medida que incorpore o volume de investimento realizado.

Nessa situação, os projetos devem ser ordenados de acordo com o índice de rentabilidade, pois o que interessa é maximizar a rentabilidade de cada unidade monetária investida, dadas as restrições de capital existentes. Uma forma de calcular esse índice é dividir o VPL pelo investimento inicial. Outra forma é dividir o valor presente dos fluxos de caixa líquidos (excluído o investimento inicial) pelo investimento inicial. A regra de decisão será pré-selecionar todos os projetos com VPL positivo e, a seguir, escolher os de maior índice de rentabilidade. Essa regra é válida somente para projetos independentes, pois a existência de relações entre eles imporá restrições adicionais às restrições de capital, que requerem ser analisadas em um contexto de carteiras e de programação matemática.

↑ Exemplos de aplicação →

► Exemplo 10.21

O quadro a seguir mostra três alternativas, A, B e C:

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2
A	-\$10	\$30	\$5
B	-\$5	\$5	\$20
C	-\$5	\$5	\$15

Selecionar a melhor alternativa, considerando um custo do capital de 10% e um capital total de \$10 disponível para investimento. Efetuar a análise considerando: a) que há restrição de capital; b) que não há restrição de capital.

a) Com restrição de capital:

O quadro a seguir mostra o VPL e o índice de rentabilidade das alternativas. O índice é calculado dividindo-se o VPL pelo investimento inicial:

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL (10%)	Índice de rentabilidade
A	-\$10	\$30	\$5	\$21,40	214%
B	-\$5	\$5	\$20	\$16,07	321%
C	-\$5	\$5	\$15	\$11,94	239%

Quando há restrição de capital, ou seja, quando o capital a ser gasto está limitado aos recursos disponíveis (\$10), as alternativas devem ser ordenadas pelo índice de rentabilidade. Nesse caso, selecionamos as alternativas B e C, nessa ordem. Juntas, elas requerem um investimento total de \$10 que se enquadra na restrição de capital (\$10).

b) Sem restrição de capital:

Caso as alternativas sejam mutuamente exclusivas e não exista restrição de capital, o índice de rentabilidade não deverá ser usado na seleção. Nesse caso, é possível selecionar a combinação (carteira) de alternativas que tenha o maior VPL. O seguinte quadro mostra três combinações possíveis, seu VPL e seu índice de rentabilidade:

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL (10%)	Índice de rentabilidade
A + B	-\$15	\$35	\$25	\$37,47	250%
A + C	-\$15	\$35	\$20	\$33,34	222%
B + C	-\$10	\$10	\$35	\$28,01	280%

A combinação selecionada seria A + B, que tem o maior VPL e requer um investimento inicial total de \$15. Repare que nessa situação o uso do *índice de rentabilidade* não teria sido apropriado para efetuar a seleção, pois indicaria a combinação B + C, que não maximiza o VPL.

► Exemplo 10.22

Uma empresa tem um custo do capital de 8% e possui as seguintes alternativas de investimento candidatas a integrar a sua carteira de projetos:

Fluxo de caixa

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
A	−\$5.000	\$580	\$1.600	\$2.000	\$3.000
B	−\$10.000	\$3.000	\$4.000	\$6.000	
C	−\$10.000	\$4.000	\$4.000	\$4.000	\$4.000
D	−\$12.000	\$5.000	\$5.000	\$5.000	
E	−\$8.000	\$6.000	\$6.000		
F	−\$5.000	\$1.000	\$4.500		
G	−\$6.000	\$2.000	\$2.000	\$3.000	\$3.000

- a) Quais projetos serão selecionados se não há restrição de capital?
b) Quais projetos serão selecionados se o capital disponível for de somente \$24.000?

No quadro a seguir, os projetos são ordenados pelo VPL e por seu *índice de rentabilidade*:

Projeto	VPL (8%)	Investimento	Projeto	Índice de rentabilidade	Investimento acumulado
C	\$3.249	\$10.000	G	36%	\$6.000
E	\$2.700	\$8.000	E	34%	\$14.000
G	\$2.153	\$6.000	C	32%	\$24.000
B	\$970	\$10.000	A	14%	
D	\$885	\$12.000	B	10%	
A	\$702	\$5.000	D	7%	
F	−\$216	\$5.000	F	−4%	

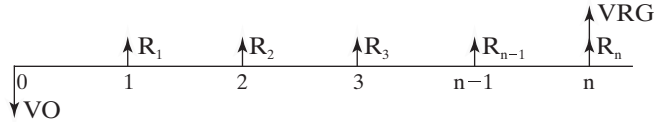
- a) Sem restrição de capital, somente o projeto F deve ser rejeitado, por ter um VPL < 0. Todos os outros projetos são passíveis de aceitação.
b) Existindo restrição de capital, os projetos devem ser selecionados de acordo com o índice de rentabilidade. Assim, todos os projetos com índice de rentabilidade superior ao custo do capital (8%) podem ser aceitos. Contudo, dado que o capital está limitado a \$24.000, somente serão aceitos os projetos G, E e C. O índice de rentabilidade foi calculado dividindo-se o VPL pelo investimento inicial e multiplicando-se o resultado por cem.

10.9 Avaliação do *leasing* financeiro

Leasing é uma palavra de origem inglesa derivada do verbo *to lease*, que significa alugar. Na legislação brasileira, o *leasing* financeiro chama-se arrendamento mercantil, que consiste em uma operação contratual de arrendamento na qual o possuidor de determinado bem (arrendador) concede a outro (arrendatário) o uso desse bem durante um período preestabelecido, recebendo em troca uma remuneração periódica (contraprestação) que é constituída pela amortização do valor do bem, encargos, remuneração da arrendadora e impostos. Ao fim do contrato, o arrendatário pode optar por devolver o bem, renovar o contrato de arrendamento ou, ainda, exercer a opção de compra do bem pagando um valor previamente estipulado (valor residual garantido).

10.9.1 Determinação da taxa de arrendamento

A estrutura da operação de *leasing* financeiro com prestações postecipadas e desembolso do VRG (valor residual garantido) ao fim do prazo é apresentada a seguir:



- onde: VO = valor da operação;
- R_t = valor da prestação do período t;
- VRG = valor residual garantido (% sobre VO);
- n = prazo da operação.

Sendo i_A a taxa de juros efetiva aplicada no arrendamento, tem-se:

$$VO = \frac{R_1}{1 + i_A} + \frac{R_2}{(1 + i_A)^2} + \dots + \frac{R_{n-1}}{(1 + i_A)^{n-1}} + \frac{R_n}{(1 + i_A)^n} + \frac{VRG}{(1 + i_A)^n}$$

Considerando prestações constantes ($R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$), o valor da operação é:

$$VO = R \times a_{\overline{n}|i_A\%} + \frac{VRG}{(1 + i_A)^n}$$

onde $a_{\overline{n}|i_A}$ é o fator de valor presente de séries uniformes: $a_{\overline{n}|i_A} = \left[\frac{(1 + i_A)^n - 1}{(1 + i_A)^n \times i_A} \right]$

$$\text{Também: } VO = (VO - VRG) + VRG$$

Ou seja, VO é a soma de duas parcelas (VO - VRG) que representa o montante a ser amortizado durante o prazo da operação, e o VRG, que será amortizado somente no final. Logo, podemos igualar as duas últimas equações de modo a obter uma equação para o cálculo da prestação (chamada contraprestação do *leasing*):

$$R \times a_{\overline{n}|i_A\%} + \frac{VRG}{(1 + i_A)^n} = (VO - VRG) + VRG \Rightarrow R = \frac{(VO - VRG)}{a_{\overline{n}|i_A\%}} + i_A \times VRG$$

Por praticidade, podemos colocar R como proporção de VO e multiplicar por cem, o que daria uma taxa de arrendamento (TA) em porcentagem:

$TA = \frac{(100\% - VRG\%)}{a_{\overline{n} i_A\%}} + i_A \times VRG\%$	$R = VO \times TA/100$
--	------------------------

Caso o valor residual seja cobrado embutido nas prestações ao longo do prazo:

$$TA = \frac{100\%}{a_{\overline{n}|i_A\%}}$$

Caso o valor residual seja cobrado no início da operação:

$$TA = \frac{100\% - VRG\%}{a_{\overline{n}|i_A\%}}$$

Se for concedido um período de carência de c meses para o início dos pagamentos das prestações, a taxa de arrendamento para os três casos será:

$$TA_c = \frac{100\% \times (1 + i_A)^c - VRG\%}{a_{\overline{n-c}|i_A\%}} + i_A \times VRG\% \Rightarrow VRG \text{ no fim da operação}$$

$$TA_c = \frac{100\% \times (1 + i_A)^c - VRG\%}{a_{\overline{n-c}|i_A\%}} \Rightarrow VRG \text{ no início da operação}$$

$$TA = \frac{100\%(1 + i_A)^C}{a_{\overline{n}|i_A\%}} \Rightarrow VRG \text{ embutido nas prestações}$$

Em qualquer uma das três modalidades de pagamento do valor residual, para operações com pagamentos antecipados das prestações, a taxa de arrendamento é a seguinte:

$$TA_a = \frac{TA}{(1 + i_A)}$$

10.10 Crédito direto ao consumidor

Como o *leasing* financeiro é uma alternativa mutuamente exclusiva em relação à compra do equipamento, pois a aceitação de uma das alternativas exclui a possibilidade de aceitar a outra, na avaliação do *leasing* para pessoa física, em que não é possível o aproveitamento fiscal da despesa mensal do arrendamento, a comparação mais adequada é com a compra do bem por meio do crédito direto ao consumidor (CDC).

CDC é o financiamento concedido por uma financeira para aquisição de bens e serviços. Sua maior utilização é normalmente para a aquisição de veículos e eletrodomésticos. O bem assim adquirido, sempre que possível, serve como garantia da operação, ficando a ela vinculado pela figura jurídica da alienação fiduciária, por meio da qual o cliente transfere à financeira a propriedade do bem adquirido com o dinheiro emprestado até o pagamento total de sua dívida. As taxas são prefixadas para operações acima de 30 dias, vinculadas à TR (taxa referencial) no caso de operações acima de quatro meses, não podendo ser vinculadas à variação cambial. Os recursos (*funding*) das operações de CDC eram, até 1988, as letras de câmbio colocadas no mercado pelas financeiras. Com a criação dos bancos múltiplos, o *funding* dessas operações passou a ser feito também com os CDBs da carteira comercial e com os CDIs.

↑ Exemplos de aplicação →

► Exemplo 10.23

Calcular a taxa de arrendamento e o valor das prestações (contraprestações) postecipadas para uma operação de *leasing* financeiro no valor de \$100.000, com prazo de 36 meses e taxa de juros de 8% a.m. aplicada pela sociedade arrendadora, nas seguintes hipóteses

sobre o valor residual: a) valor residual de 20% cobrado ao término da operação; b) valor residual cobrado ao longo do prazo da operação (diluído nas parcelas); c) valor residual cobrado no início da operação.

Dados: VO = \$100.000, VRG = 20%, n = 36 meses, $i_A = 8\%$, TA = ?, R = ?

a) Valor residual garantido (VRG) cobrado ao final da operação:

Taxa de arrendamento:

$$TA = \frac{(100\% - \text{VRG}\%)}{a_{n|i_A\%}} + i_A \times \text{VRG}\% = \frac{(100\% - 20\%)}{\left[\frac{(1,08)^{36} - 1}{(1,08)^{36} \times 0,08} \right]} + 0,08 \times 20\% = 8,4276\%$$

Prestação mensal: R = VO × TA = \$100.000 × 8,4276/100 = \$8.427,57

b) Valor residual garantido (VRG) cobrado diluído nas parcelas:

Taxa de arrendamento:

$$TA = \frac{100\%}{a_{n|i_A\%}} = \frac{100\%}{a_{36|8\%}} = \frac{100\%}{\left[\frac{(1,08)^{36} - 1}{(1,08)^{36} \times 0,08} \right]} = \frac{100\%}{11,71719} = 8,5345\% \text{ a.m.}$$

Prestação mensal: R = VO × TA = \$100.000 × 8,5345/100 = \$8.534,47

c) Valor residual garantido (VRG) cobrado no início da operação:

Taxa de arrendamento:

$$TA = \frac{(100\% - \text{VRG}\%)}{a_{n|i_A\%}} = \frac{(100\% - 20\%)}{a_{36|8\%}} = \frac{80\%}{\left[\frac{(1,08)^{36} - 1}{(1,08)^{36} \times 0,08} \right]} = 6,8276\%$$

Prestação mensal: R = VO × TA = \$100.000 × 6,8276/100 = \$6.827,58

Cálculo da taxa de arrendamento na calculadora HP 12c para os casos:

a)	b)	c)
(f) (FIN)	(f) (FIN)	(f) (FIN)
100 (CHS) (PV)	100 (CHS) (PV)	80 (CHS) (PV)
8 (i)	8 (i)	8 (i)
36 (n)	36 (n)	36 (n)
20 (FV)	(PMT) ⇒ 8,5345%	(PMT) ⇒ 6,8276%
(PMT) ⇒ 8,4276%		

► Exemplo 10.24

Determinar o valor da prestação para uma operação de *leasing* financeiro no valor de \$130.000, com prazo de 36 meses, período de carência de três meses para início do pagamento das prestações e valor residual garantido de 1% cobrado ao término da operação. Considerar uma taxa de juros aplicada pela instituição financeira de 2% a.m.

Dados: VO = \$130.000, n = 36 meses, c = 3 meses (carência), VRG = 1%, $i_A = 2\%$ a.m., $TA_c = ?$, R = ?

- Cálculo da taxa de arrendamento e da prestação, considerando período de carência

$$\begin{aligned} \text{Taxa de arrendamento: } TA_c &= \frac{[100\% \times (1 + i_A)^c - \text{VRG}\%]}{a_{n-c} | i_A \%} + i_A \times \text{VRG}\% \\ &= \frac{[100\% \times (1,02)^3 - 1\%]}{\left[\frac{(1,02)^{33} - 1}{(1,02)^{33} \times 0,02} \right]} + 0,02 \times 1\% = 4,4021\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

$$\text{Prestação mensal: } R = \text{VO} \times TA_c = \$130.000 \times 4,4021/100 = \$5.722,72$$

► Exemplo 10.25

Uma pessoa pretende adquirir um veículo cujo valor à vista é de \$16.800. A concessionária oferece um financiamento pelo sistema *leasing*, pagando-se uma entrada de 8,631% (\$1.450) e 36 prestações mensais fixas. Considerar que a instituição financeira que intermedeia a operação aplica no arrendamento uma taxa de juros de 2,5% a.m. Pede-se: calcular a taxa de arrendamento e o valor da prestação mensal.

Dados: VO = \$16.800, VRG = 8,631% (entrada), n = 36 meses, $i_A = 2,5\%$ a.m., TA = ?, R = ?

Taxa de arrendamento e prestação:

$$TA = \frac{100\% - \text{VRG}\%}{a_{n} | i_A \%} = \frac{100\% - 8,631\%}{a_{36} | 2,5\%} = 3,8788\% \text{ a.m.}$$

$$R = \text{VO} \times TA = \$16.800 \times 3,8788/100 = \$651,64$$

► Exemplo 10.26

Uma pessoa pretende comprar um veículo de \$15.000 que pode ser adquirido por meio de *leasing* ou pelo CDC. Em ambos os casos, paga-se uma entrada de 10% mais 24 prestações mensais. Para o caso do *leasing*, a taxa de juros aplicada pela instituição financeira é de 4% a.m. e o imposto sobre serviços (ISS) é de 0,5%. Para o caso do CDC, a taxa de juros é de 3% a.m. e paga-se imposto sobre operações financeiras (IOF) de 0,8%. Calcular a taxa de arrendamento paga pelo *leasing* e o valor das prestações em ambos os tipos de financiamento.

Dados: VO = \$15.000, VRG = 10% (entrada), n = 24 meses, $i_A = 4\%$ a.m., ISS = 0,5%, $i = 3\%$ a.m., IOF = 0,8%, TA = ?, R = ?

- Taxa de arrendamento:

$$\begin{aligned} \text{(sem imposto) } TA &= \frac{100\% - \text{VRG}\%}{a_{n} | i_A \%} = \frac{100\% - 10\%}{a_{24} | 4\%} = \frac{90\%}{\left[\frac{(1,04)^{24} - 1}{(1,04)^{24} \times 0,04} \right]} = \frac{90\%}{15,24696} = \\ &= 5,9028\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

$$TA(\text{com ISS}) = \frac{5,9028\%}{1 - 0,5/100} = 5,9325\% \text{ a.m.}$$

• Prestação:

$$\text{No leasing: } R = VO \times TA = \$15.000 \times 5,9325/100 = \$889,87$$

$$\begin{aligned} \text{No CDC: } R &= (\text{Financiamento efetivo}) / a_{\overline{24}|3\%} + \text{IOF} \\ &= [(\$15.000 - \$1.500) / 16,93554] \times 1,008 = \$803,52 \end{aligned}$$

Do ponto de vista meramente financeiro, aparentemente o CDC seria a melhor opção, pois representa a menor prestação mensal.

► Exemplo 10.27

Calcular a taxa de arrendamento para uma operação de 24 meses com taxa de juros de 1,4%, VRG de 1% ao término da operação e ISS de 0,5%.

Dados: VRG = 1%, n = 24 meses, $i_A = 1,4\%$ a.m., ISS = 0,5%, TA = ?

Taxa de arrendamento sem imposto:

$$\begin{aligned} TA &= \frac{100 - \text{VRG}}{a_{\overline{n}|i_A\%}} + i_A \times \text{VRG} = \frac{100\% - 1\%}{a_{\overline{24}|1,4\%}} + 0,014 \times 1\% = \\ &= \frac{99\%}{6,83514} + 0,014 \times 1\% = 4,89935\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

Taxa de arrendamento com imposto:

$$TA = \frac{4,89935\%}{1 - 0,5/100} = 4,9239\% \text{ a.m.}$$

► Exemplo 10.28

A taxa de arrendamento para uma operação de 36 meses com VRG de 1% no fim da operação e ISS de 0,5% é de 3,4056%. Determinar a taxa de juros da operação.

Dados: VRG = 1%, n = 36 meses, ISS = 0,5%, TA (com imposto) = 3,4056%, $i_A = ?$

Taxa de arrendamento sem imposto:

$$TA = 3,4056\% \times \left(1 - \frac{0,5}{100}\right) = 3,3886\% \text{ a.m.}$$

Taxa de juros:

$$TA = \frac{100\% - VRG}{a_{n|i_A\%}} + i_A \times VRG\%$$

$$3,3886 = \frac{100\% - 1\%}{\left[\frac{(1 + i_A)^{36} - 1}{(1 + i_A)^{36} \times i_A} \right]} + i_A \times 1\%$$

⇒ Por aproximações sucessivas, $i_A = 1,1553\%$ a.m.

► Exemplo 10.29

A taxa de arrendamento (sem imposto) para uma operação com VRG de 10% no fim da operação é de 3,7310%. Considerando que a taxa de juros aplicada é de 2% a.m., determinar o prazo da operação.

Dados: VRG = 10%, TA = 3,7310%, $i_A = 2\%$ a.m., $n = ?$

Determinação do prazo:

$$TA = \frac{100 - VRG}{a_{n|i_A\%}} + i_A \times VRG$$

$$3,7310\% = \frac{100\% - 10\%}{\left[\frac{(1,02)^n - 1}{(1,02)^n \times 0,02} \right]} + 0,02 \times 10\%$$

⇒ $(1,02)^n = 2,039887 \Rightarrow n = \frac{\text{Log } 2,039887}{\text{Log } 1,02} = 36$ meses

10.11 Avaliação do *leasing* financeiro: o caso da pessoa jurídica

O *leasing* financeiro é uma alternativa mutuamente exclusiva em relação à compra do equipamento, pois a aceitação de uma delas exclui a possibilidade de aceitar a outra. Contudo, se a aquisição do bem for realizada com recursos próprios, mesmo que parcialmente, a alternativa de compra exporia a empresa a um risco financeiro menor em relação à alternativa de *leasing* financeiro. Assim, para igualar os riscos financeiros das duas alternativas, a compra deve considerar o financiamento total do bem a fim de poder ser comparada com o *leasing*. Nas operações das pessoas jurídicas, é possível o aproveitamento fiscal da despesa mensal do arrendamento por sua dedutibilidade na apuração do lucro real. Consequentemente, esse fator deve ser levado em conta na avaliação para pessoa jurídica.

A expressão a seguir é conhecida como modelo de MDB (Myers, Dill e Bautista).⁵ Ela permite determinar, em termos de valor presente, a vantagem ou desvantagem do *leasing* em relação à alternativa de compra:

⁵ Samanez, C. P. *Gestão de investimentos e geração de valor*. São Paulo: Pearson, 2007.

$$V_{L-C} = VO - \sum_{t=1}^L \frac{R_t(1 - T) + T \times D_t}{(1 + i^*)^t} \quad \text{se } V_{L-C} > 0 \Rightarrow \text{selecionar o leasing}$$

onde: V_{L-C} = valor presente da vantagem ou da desvantagem financeira do *leasing* em relação à compra;

VO = valor da operação (valor do ativo arrendado);

R_t = valor da prestação (contraprestação) paga pelo *leasing* no período t ;

D_t = cota de depreciação do ativo arrendado em t ;

L = prazo do *leasing* financeiro;

T = alíquota marginal de IR da arrendatária;

N = prazo de depreciação do ativo;

i = taxa de juros antes de IR para a empresa arrendatária;

i^* = $i(1 - T)$ = taxa de juros após IR para a empresa arrendatária;

i_A = taxa de juros cobrada no arrendamento;

t = t -ésimo período.

A fórmula supõe que o benefício fiscal dos fluxos possa ser instantâneo, ou seja, é obtido no próprio período em que o fluxo ocorre. Supõe também que o VRG venha a ser cobrado embutido nas prestações ao longo do prazo do contrato. Entretanto, se o VRG for pago no final da operação, ou no início, poderá ser facilmente incluído na fórmula. A fórmula MDB é de aplicação simples e permite avaliar facilmente o *leasing* financeiro do ponto de vista da pessoa jurídica arrendatária. Basta observar se V_{L-C} é positivo para selecionar o *leasing* como a melhor alternativa ou não.

A seguir, aplicaremos o modelo de MDB para avaliar uma operação de *leasing* financeiro com as seguintes características: VO (valor da operação = \$800.000); L (prazo do *leasing* = quatro períodos); N (prazo de depreciação do ativo = quatro períodos); T (alíquota de IR da arrendatária = 34%); i (taxa de juros antes de IR para a empresa arrendatária = 10% por período); i_A (taxa de juros cobrada no arrendamento = 9% por período); VGR embutido nas prestações:

- Cálculo da taxa de arrendamento e das prestações:

$$TA = \frac{100\%}{a_{\overline{n}|i_A\%}} = \frac{100\%}{a_{\overline{n}|9\%}} = \frac{100\%}{\left[\frac{(1,09)^4 - 1}{(1,09)^4 \times 0,09} \right]} = 30,87\% \text{ por período}$$

$$R_t = VO \times TA = \$800.000 \times 30,87/100 = \$246.935$$

- Cálculo da cota de depreciação por período:

$$D_t = \frac{VO}{N} = \frac{\$800.000}{4} = \$200.000 \text{ por período}$$

- Cálculo do numerador do somatório da fórmula:

$$R_t(1 - T) + T \times D_t = \$246.935 \times (1 - 0,34) + 0,34 \times \$200.000 = \$230.977$$

- Taxa de juros (após IR) da empresa: $i^* = i \times (1 - T) = 10\% \times (1 - 0,34) = 6,5\%$
- Cálculo do valor presente da vantagem financeira do *leasing* em relação à compra:

$$V_{L-C} = VO - \sum_{t=1}^{L=4} \frac{R_t(1 - T) + T \times D_t}{(1 + i^*)^t} = \$800.000 - 230.977 \times a_{\overline{4}|i^*} =$$

$$= \$800.000 - 230.977 \times a_{\overline{4}|6,5\%} = \$8.719 > 0$$

Como $V_{L-C} > 0 \Rightarrow$ selecionar o *leasing*

O exemplo supõe que o valor da operação seja igual ao valor do bem arrendado sujeito à depreciação.

Exercícios propostos

1. Calcular a TIR dos seguintes fluxos de caixa:

a)	Ano	Fluxo de caixa	b)	Ano	Fluxo de caixa	c)	Ano	Fluxo de caixa	d)	Ano	Fluxo de caixa
	0	-\$100		0	\$100		0	\$400		0	-\$200
	1	\$700		1	-\$200		1	\$400		1	\$700
	2	-\$1.200		2	\$150		2	-\$1.000		2	-\$600

2. Calcular a TIR de um projeto que requer um investimento inicial de \$2.000.000 e produz um fluxo de caixa de \$240.000/ano durante 15 anos.
3. A Riolut instalou um sistema de geração de energia elétrica que custou \$30 milhões. Os custos operacionais do equipamento são de \$120.000/mês e sua vida útil é estimada em 15 anos. Considerando que a empresa deseja uma rentabilidade mínima de 12% a.m., determinar o custo mensal que deve ser repassado aos usuários do sistema de modo que cubra os gastos operacionais e remunere adequadamente o capital empregado.
4. Uma empresa industrial estuda a viabilidade econômica de um projeto de investimento orçado em \$981.815,00. Considerando que o projeto tem duração prevista de 20 anos e o estudo de viabilidade econômico-financeiro projetou fluxos de caixa de \$100.000 por ano, calcular a TIR do projeto.
5. Considere as seguintes alternativas de investimento mutuamente exclusivas:

Fluxos de caixa

Alternativas	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Alternativa A	-\$100	\$25	\$125
Alternativa B	-\$100	\$95	\$45
Fluxo incremental (A - B)	0	-\$70	\$80

Considerando um custo do capital de 10% a.a., pede-se: a) a TIR das alternativas; b) a TIR do fluxo incremental A-B; c) o VPL das alternativas e do fluxo incremental; d) identificar pela análise do fluxo incremental qual é a alternativa preferível.

6. Considere as seguintes alternativas mutuamente exclusivas:

Fluxo de caixa

Alternativas	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Alternativa a	-\$100	\$120	\$30
Alternativa b	-\$100	\$40	\$140

Determinar a taxa de desconto que faz as duas alternativas serem igualmente atrativas para o investidor.

7. Uma empresa estuda a possibilidade de substituir um equipamento. Dispõe de duas alternativas mutuamente exclusivas, o equipamento N e o equipamento V. Os fluxos de caixa estimados são os seguintes:

Fluxo de caixa			
Alternativas	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Máquina N	-\$100	\$1.000	\$200
Máquina V	-\$90	\$300	\$1.400

Considerando um custo do capital de 10% a.a., pede-se identificar qual é a melhor escolha: a) pela análise do fluxo incremental; b) pelo VPL.

8. Uma empresa estuda a troca de uma máquina velha por uma nova. Com as seguintes informações, determinar se a máquina deve ou não ser substituída.

	Máquina velha (V)	Máquina nova (N)
Investimento inicial	—	\$25.000
Custo operacional	\$12.000/ano	\$8.000/ano
Vida útil	2 anos	6 anos
Custo do capital	6% a.a.	6% a.a.

9. Determinar qual projeto é preferível:

	Projeto X	Projeto Y
Investimento inicial	\$1.000	\$600
Fluxo de caixa	\$200/ano	\$100/ano
Vida útil	100 anos	90 anos
Custo do capital	10% a.a.	10% a.a.
Valor residual	0	0

10. Determinar qual projeto é preferível:

	Projeto A	Projeto B
Investimento inicial	\$210.000	\$360.000
Custo operacional/ano	\$72.000	\$82.000
Vida útil	10 anos	12 anos
Custo do capital	15% a.a.	18% a.a.
Receitas/ano	\$160.000	\$210.000
Valor residual	0	\$50.000

11. Qual dos equipamentos, A ou B, é mais adequado economicamente? Considerar um custo de oportunidade do capital de 10% a.a.

Equipamento	Investimento	Custo operacional/ano	Vida útil
A	\$18.000	\$2.860	13 anos
B	\$28.000	\$1.960	18 anos

12. Para as seguintes alternativas mutuamente exclusivas, calcular o VPL e a anuidade uniforme equivalente e determinar qual delas representa a melhor escolha econômica:

	Alternativa X	Alternativa Y
Investimento inicial	\$5.000	\$8.000
Fluxo de caixa	\$1.672/ano	\$1.594/ano
Duração	5 anos	10 anos
Custo do capital	10% a.a.	10% a.a.

13. Uma empresa cujo custo de oportunidade do capital é de 7% a.a. estuda a possibilidade de comprar uma máquina. Para escolher entre a máquina A e a máquina B, ela dispõe das seguintes informações sobre as alternativas de investimento:

	Máquina A	Máquina B
Investimento inicial	\$19.000	\$25.000
Fluxo de caixa	\$12.000/ano	\$8.000/ano
Vida útil	4 anos	6 anos
Valor residual	0	0

Para as duas alternativas de investimento, calcular: a) o VPL; b) a TIR; c) a anuidade uniforme equivalente. Determinar qual projeto é preferível.

14. Qual das alternativas mutuamente exclusivas, A ou B, é melhor, considerando um custo do capital de 5% a.a.?

Fluxos de caixa

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
Alternativa A	-\$14	\$8	\$8	
Alternativa B	-\$11	\$5	\$5	\$5

15. Uma empresa industrial pretende terceirizar durante três anos a fabricação de determinada peça. Um estudo mostrou que, para produzir 8.000 peças/ano, é necessário um investimento inicial de \$200.000 em equipamentos e custos operacionais totais de \$18.000/ano, se a fabricação for interna. Se a fabricação for terceirizada, o preço de compra será de \$12/peça. Considerando que o custo do capital da empresa seja de 8% a.a., determinar se a fabricação da peça deve ou não ser terceirizada.
16. Uma bomba instalada em um poço artesiano tem custos operacionais de \$450/ano, considerados muito altos para o tipo de instalação. Trocá-la por um equipamento mais moderno representaria um investimento líquido de \$1.230 sem valor residual. Uma projeção indica que a nova bomba teria os seguintes custos operacionais/ano ao longo de sua vida útil:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
Custos operacionais	0	\$250	\$200	\$150	\$100	\$50

Considerando um custo de oportunidade do capital de 2% a.a., calcular o custo anual uniforme equivalente das duas alternativas (trocar ou não trocar a bomba) e determinar se a bomba deve ou não ser substituída. Não levar em consideração os efeitos fiscais.

17. Atualmente, a operação de um equipamento produz uma receita líquida de \$200/ano. Existe a possibilidade de trocá-lo por um novo equipamento orçado em \$4.800, com vida útil de cinco anos e sem valor residual. No caso da troca de equipamentos, o fluxo de caixa líquido aumentará geometricamente nos próximos cinco anos de acordo com a seguinte projeção:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
Fluxo de caixa	-\$4.800	\$200	\$400	\$800	\$1.600	\$3.200

Considerando um custo de oportunidade do capital de 5% a.a., calcular as anuidades uniformes equivalentes para as duas alternativas (trocar ou não trocar o equipamento) e determinar se o equipamento deve ou não ser substituído. Por simplicidade, não considerar os efeitos fiscais.

18. Para as seguintes alternativas mutuamente exclusivas, calcular a TIR e o VPL. Se o custo do capital for de 10% a.a., determinar a melhor alternativa.

Fluxos de caixa

Ano	A	B	C	D
0	-\$1.500	-\$1.500	-\$1.500	-\$1.500
1	150	0	150	300
2	1.350	0	300	450
3	150	450	450	750
4	-150	1.050	600	750
5	-600	1.950	1.875	900

19. Uma prensa hidráulica nova custa \$90.000. A máquina pode ser operada até o término de sua vida útil de quatro anos ou pode ser substituída antes desse prazo. O equipamento gera um fluxo de caixa operacional líquido de \$30.000/ano e será depreciado linearmente em quatro anos. A um custo do capital de 20% a.a., determinar a época ótima de substituição da máquina. A empresa dispõe das seguintes informações sobre os valores de mercado de máquinas similares usadas:

Anos de uso da máquina	1	2	3	4
Valor de mercado (no ano)	\$80.000	\$72.000	\$68.000	\$34.000

20. Um equipamento pode ser usado por cinco anos ou pode ser substituído antes desse prazo. Calcular as anuidades uniformes equivalentes e determinar o período ótimo de substituição do equipamento, considerando um custo do capital de 10% a.a., com os seguintes VPLs para cada uma das alternativas de substituição:

Ano	1	2	3	4	5
VPL	\$2.000	\$5.000	\$7.000	\$8.000	\$10.000

Observação: cada alternativa de substituição do equipamento (substituir no primeiro, no segundo, ..., ou no quinto anos) é mutuamente exclusiva em relação às outras.

21. O fluxo de caixa de um projeto de plantação de eucaliptos para fabricação de papel e celulose é função do tempo: $F_t = 10.000(1 + t)^{1/2}$. O valor presente líquido do projeto com t anos de duração pode ser expresso por $VPL_t = F_t e^{-kt} - C$, onde $k = 5\%$ a.a. (custo do capital); $C = \$15.000$ (investimento inicial); $t =$ tempo. Determinar o tempo ótimo de corte das árvores usando como critério decisório o método do VPL.
22. Uma empresa deve arrendar operacionalmente um equipamento. O valor do equipamento é de \$27.000 e sua vida útil é de três anos. A sociedade arrendadora propõe um contrato de três anos, comprometendo-se a arcar com os gastos gerais de manutenção, estimados em \$3.000/ano. A alíquota de IR da arrendadora é de 30% e seu custo do capital, de 10% a.a. Calcular o valor da prestação anual mínima líquida do IR a ser cobrada da arrendatária.
23. Determinar qual é a melhor alternativa do ponto de vista financeiro: comprar o equipamento ou contratar uma operação de *leasing* financeiro.
- Dados da operação:
- valor do equipamento (igual ao valor da operação) = \$21.000;
 - valor residual diluído nas prestações;
 - vida útil do equipamento (igual ao prazo do contrato de arrendamento) = 15 períodos;
 - alíquota de IR = 35%;
 - taxa de juros cobrada no *leasing* = 7% por período;
 - taxa de juros da empresa = 10% por período.
24. Calcular a taxa de arrendamento e o valor das prestações para uma operação de *leasing* financeiro de \$20.000 com prazo de 24 meses sem valor residual e com prestações pagas ao fim de cada mês. Considerar uma taxa de juros de 5% a.m. fixada pela instituição financeira que intermedeia o financiamento.
25. A taxa de arrendamento para uma operação de *leasing* financeiro sem valor residual e com prazo de 36 meses é de 5,2887% a.m. Calcular a taxa de juros aplicada pela instituição financeira.
26. Calcular a taxa de juros aplicada em uma operação de *leasing* financeiro com prazo de 48 meses, taxa de arrendamento de 3,9195% a.m. e valor residual de 4% a ser cobrado ao término da operação.
27. Considerando uma taxa de juros aplicada pela instituição financeira de 5% a.m., determinar a taxa de arrendamento e o valor da prestação postecipada para uma operação de *leasing* financeiro no valor de US\$200.000, com prazo de 28 meses e valor residual garantido de 5% cobrado ao fim da operação.

28. No exercício anterior, se for concedido um período de carência de dois meses para o início do pagamento das prestações, calcular a taxa de arrendamento e o valor das prestações.
29. Uma concessionária vende por meio de *leasing* um veículo cujo valor à vista é de \$20.000. Devem ser pagas uma entrada de 20% e 36 prestações mensais iguais. Considerando que a instituição financeira aplique juros de 3% a.m., calcular a taxa de arrendamento e o valor das prestações.
30. Por um veículo adquirido pelo sistema *leasing* paga-se determinada entrada e 24 prestações mensais iguais. Considerando uma taxa de arrendamento de 4% a.m. e que a instituição financeira aplique uma taxa de juros efetiva de 3% a.m., calcular a porcentagem paga como entrada (VRG).
31. A taxa de arrendamento de uma operação de *leasing* é de 5,0954% a.m. Considerando um VRG de 15% pago ao término da operação e que a instituição financeira que intermedeia o financiamento aplica uma taxa de juros de 4% a.m., determinar o prazo da operação em meses.
32. Determinar a taxa de juros aplicada em um arrendamento de 24 meses em que o VRG de 20% é pago na entrada e a taxa de arrendamento é de 4,7238% a.m.
33. O quadro a seguir mostra os fluxos de caixa de quatro projetos mutuamente exclusivos:

Ano	Projeto A	Projeto B	Projeto C	Projeto D
0	-\$85.000	-\$150.000	-\$250.000	-\$378.000
1	\$40.000	\$78.000	0	\$390.000
2	\$40.000	\$78.000	0	0
3	\$40.000	\$78.000	0	0
4	\$40.000	\$78.000	\$700.000	\$150.000
Vida útil (anos)	4	4	4	4

Admitindo-se que o custo do capital adequado para análise econômica seja de 20% a.a., pede-se:

- estimar os seguintes indicadores de rentabilidade para cada projeto: VPL, TIR, relação custo-benefício (B/C), *pay-back* (PB), anuidade uniforme equivalente (AE);
 - selecionar a melhor alternativa usando o VPL e a AE;
 - fazer uma análise que mostre o processo de seleção entre as alternativas A e C, como função do custo de oportunidade do capital.
34. Uma empresa de transportes planeja a renovação de sua frota de caminhões. Após um estudo técnico, chegou à conclusão de que somente as marcas Fiat, Ford, Honda e Toyota fabricam modelos adequados a suas necessidades. O quadro a seguir mostra as diversas características operacionais e os custos dos caminhões dessas quatro marcas:

Marca	Custo de aquisição do caminhão	Desempenho do caminhão (km por litro de óleo diesel)	Custos de manutenção anual (\$/ano)	Vida útil do caminhão (anos)
Fiat	\$25.000	10	\$3.000	5
Ford	\$28.000	11	\$2.800	6
Honda	\$35.000	16	\$2.300	8
Toyota	\$33.000	14	\$2.200	7

Admita que cada caminhão, independentemente da marca, rode em torno de 40.000 km por ano e que o custo do óleo diesel seja constante e igual a \$1 por litro. Considerando que o custo do capital da empresa é de 20% a.a., determinar qual marca de caminhão deve ser escolhida. Desconsiderar impostos e valores residuais.

35. Uma indústria do setor de alumínio pretende investir em uma nova planta. Encomendou um estudo de mercado que recomendou três possíveis tamanhos de planta: a planta A requer um investimento de \$10 milhões; a planta B, um investimento de \$12 milhões; e a planta C, um investimento de \$18 milhões. O estudo de engenharia projetou uma vida útil de dez anos para a planta A, 15 anos para a B e 18 anos para a C. De acordo com o estudo de viabilidade, os fluxos de caixa econômicos dependem do investimento requerido e da vida útil da planta específica segundo a seguinte função: $FC(I,N) = 1.300.000 + 0,1 \times I + 100.000 \times N$, onde FC corresponde ao fluxo de

caixa anual (constante), I refere-se ao investimento requerido e N, à vida útil da planta específica. Considerando um custo do capital de 20% a.a. e que não haja impostos nem valor residual, determinar o tamanho da planta economicamente adequado.

36. Considere um custo do capital de 10% e admita que lhe sejam oferecidos os seguintes projetos:

Projeto	Investimento em $t = 0$	Fluxo em $t = 1$	Fluxo em $t = 2$
A	-\$100	\$60	\$60
B	-\$10.000	\$8.000	\$8.000

- Considerando que os dois projetos sejam independentes, utilizar o critério da TIR e do VPL para analisar a viabilidade de ambos os projetos.
- Considerando os dois projetos como mutuamente exclusivos, utilizar o critério correto para identificar qual projeto deverá ser escolhido.
- Na possibilidade de investir em um terceiro projeto, C, determinar se este é mais vantajoso do que o projeto escolhido no item b.

Projeto	Investimento	Fluxo em $t = 1$	Fluxo em $t = 2$	Fluxo em $t = 3$
C	-\$10.000	\$6.000	\$6.000	\$6.000

37. Uma empresa analisa três alternativas de investimento mutuamente exclusivas. Determinar a alternativa mais adequada, considerando um custo do capital de 9% a.a. e as seguintes informações sobre as alternativas:

Alternativa	Investimento líquido	Fluxo de caixa anual	Vida útil (anos)	Valor de liquidação (valor residual ao término da vida útil)
A	\$480	\$113	5	\$149
B	\$620	\$120	7	\$140
C	\$750	\$142	7	\$187

Análise e avaliação econômica de investimentos de capital

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 **11**

Objetivos de aprendizagem

Neste capítulo, você aprenderá sobre:

- Considerações na montagem do fluxo de caixa
- Fluxo econômico
- Fluxo econômico-financeiro
- Decisões econômicas e financeiras
- Variáveis e custos relevantes na determinação do fluxo de caixa
- Decisões em moeda nacional e estrangeira
- Montagem do fluxo de caixa para avaliação econômica de projetos de investimento

11.1 A importância dos fluxos de caixa na avaliação econômica

O fluxo de caixa resume as entradas e as saídas efetivas de dinheiro ao longo do tempo, permitindo, dessa forma, conhecer a rentabilidade e a viabilidade econômica do projeto. Nesse sentido, representa a renda econômica gerada pelo projeto ao longo de sua vida útil. Fluxos de caixa não são sinônimo de lucros contábeis, pois podem ocorrer mudanças no lucro contábil sem que haja mudança correspondente nos fluxos de caixa. Eles são a principal matéria-prima para estimar o valor de uma empresa, medir a rentabilidade de um projeto de investimento, planejar as operações ou estabelecer a capacidade de pagamento de uma dívida.

11.2 Fluxo de caixa incremental

Os fluxos de caixa incrementais são a base para o cálculo dos índices que permitem efetuar a avaliação econômica dos projetos de investimento, pois por meio do desconto desses fluxos pode ser estabelecida a viabilidade econômica do projeto. Basicamente, esses fluxos são os efeitos positivos ou negativos no caixa devido aos movimentos de fundos provocados pelo investimento. Ou seja, são os fundos diferenciais comprometidos (receitas e custos) resultantes de se tomar a decisão de investir. Esses fundos devem ser estimados em uma base depois de impostos e ser reconhecidos pelo regime de caixa, independentemente do regime de competência de exercícios da contabilidade.

O raciocínio econômico subjacente a qualquer desembolso de capital está estritamente baseado nas mudanças adicionais, que são o resultado direto da decisão de investir; em outras palavras, na diferença entre a situação atual dos negócios e a situação decorrente da decisão tomada, na forma de investimentos, receitas, custos e despesas adicionais. Desse modo, apenas os fluxos incrementais são relevantes para a decisão de prosseguir ou não com o projeto. Caso um fluxo de caixa ocorra independentemente de o projeto ser ou não empreendido, então não se trata de um fluxo incremental e, portanto, será irrelevante para a decisão de investimento.

A análise econômica é um processo relativo, e não absoluto. Está vinculada às alternativas e às diferenças entre elas. Caso um investimento resulte em novas receitas, mas, ao mesmo tempo, reduza algumas receitas já existentes, apenas o impacto líquido será relevante na análise econômica. Qualquer custo ou despesa que permaneça constante antes e depois que o investimento tenha sido feito, mas que não afete os fluxos de caixa, não terá relevância, pois não é incremental.

11.3 Considerações na montagem do fluxo de caixa

A análise de projetos de investimento e a montagem do fluxo de caixa necessário para avaliação econômica não são uma ciência exata. Entretanto, se o analista seguir alguns princípios e convenções comumente aceitos, o resultado obtido será mais satisfatório. A seguir, listamos alguns dos principais aspectos a serem considerados na montagem do fluxo de caixa:

1. Os fluxos de caixa devem ser estimados em base incremental ou, em outras palavras, os únicos fluxos relevantes são aqueles decorrentes da aceitação do projeto.
2. Os custos de oportunidade associados a recursos previamente possuídos devem ser alocados com base no melhor uso alternativo do bem.
3. Devem ser consideradas as mudanças nos requerimentos de capital de giro, uma vez que essas mudanças são incrementais e afetam a decisão.
4. Os efeitos fiscais (economias de imposto) e quaisquer outros efeitos derivados da aceitação do projeto devem ser considerados.
5. Os efeitos derivados do projeto devem ser incluídos (impacto do projeto em outros setores da empresa).
6. Os custos passados já gastos (custos afundados) não serão recuperados se o projeto não for empreendido. Logo, por não serem valores incrementais, não devem ser incluídos no fluxo de caixa.
7. Os custos não indiretamente atribuídos ao projeto devem ser alocados somente se forem incrementais.
8. Os fluxos devidos ao financiamento não devem ser incluídos no fluxo de caixa para avaliação da viabilidade econômica do investimento de capital.
9. Os efeitos da inflação nos fluxos de caixa e na avaliação devem receber tratamento adequado.
10. O valor residual ou de liquidação do projeto deve ser estimado de modo consistente.

11.4 Fluxo econômico

O fluxo econômico reflete as atividades operacionais do projeto. É o fluxo disponível para todos os provedores de capital, seja por endividamento ou por participação acionária. Muitas vezes é chamado fluxo da firma ou fluxo de caixa livre. Como o fluxo de caixa econômico

é usado para determinar o potencial de geração de renda econômica do projeto, ou seja, para estabelecer a sua rentabilidade econômica intrínseca, os fluxos decorrentes da forma como o projeto será financiado não devem ser incluídos em sua estimação.

Em sua forma mais simples, o fluxo econômico é aquele gerado pelas operações, líquido de impostos, menos os dispêndios de capital necessários para assegurar a permanência e o crescimento do projeto (reinvestimento) e mais/menos as mudanças no capital de giro operacional. Deve ser ajustado para depreciação e outras despesas não caixa:

$$\begin{aligned}\text{Fluxo de caixa econômico} &= \text{Fluxo operacional após impostos} \\ &\quad - \text{Dispêndios de capital} \\ &\quad \pm \text{Mudanças no capital de giro} + \text{Depreciação}\end{aligned}$$

Por não representarem desembolsos de caixa, a depreciação e os outros fluxos não caixa que têm algum impacto fiscal devem ser somados novamente, depois de considerado seu efeito fiscal. Para condizer com a definição de fluxo de caixa econômico, a taxa de desconto aplicada a esse fluxo deve refletir o custo de oportunidade de todos os provedores de capital, ponderado pela contribuição relativa de cada provedor no capital total investido no projeto. A isso chamamos custo médio ponderado do capital.

11.5 Fluxo econômico-financeiro

O fluxo econômico-financeiro representa o fluxo de caixa resultante depois de considerados os fluxos decorrentes da forma pela qual o projeto será financiado. A inclusão dos fluxos financeiros transforma o fluxo econômico em fluxo econômico-financeiro. Esse fluxo nos permite estimar a rentabilidade do projeto do ponto de vista do capital próprio (do ponto de vista dos acionistas).

Em sua forma mais simples, o fluxo econômico-financeiro será dado por:

$$\begin{aligned}\text{Fluxo econômico-financeiro} &= \text{Fluxo de caixa econômico} + \text{Financiamentos} \\ &\quad - \text{Prestações pagas pelo financiamento} \\ &\quad + \text{Benefício fiscal dos juros do financiamento}\end{aligned}$$

O fluxo de caixa econômico-financeiro muitas vezes é chamado fluxo do acionista. Para condizer com a definição de fluxo econômico-financeiro, a taxa de desconto aplicada a esse fluxo deve refletir o custo de oportunidade dos provedores do capital próprio (dos acionistas).

Se o objetivo da análise for mensurar o valor econômico do projeto, então o fluxo relevante será o fluxo econômico. A avaliação econômica busca determinar a rentabilidade intrínseca do projeto, sem incluir o financiamento utilizado para executá-lo. Por outro lado, se o objetivo for medir o valor para os acionistas, o fluxo relevante será o fluxo econômico-financeiro, que resulta da inclusão dos fluxos financeiros.

11.6 Decisões econômicas e financeiras

Na análise da viabilidade econômica de um projeto de investimento, os fluxos financeiros não devem ser incluídos, pois as decisões de investimento e de financiamento são separadas, sendo este um conceito fundamental em finanças, conhecido como *teorema da separação*: “O sucesso ou insucesso do projeto deve ser determinado considerando unicamente seu próprio potencial de geração de renda econômica, independentemente da forma como será financiado”.

A separação das decisões de investimento e de financiamento é possível pela existência de um mercado de capitais eficiente, por meio do qual as firmas e os indivíduos podem aplicar e levantar capitais, e pela existência de oportunidades de investimento em atividades produtivas (projetos). Esses fatores permitem que a decisão de investimento seja tomada independentemente dos gostos e preferências particulares das empresas ou dos indivíduos, tornando-a uma tarefa essencialmente técnica.

↑ Exemplo de aplicação

► Exemplo 11.1

Um projeto de investimento que requer um desembolso inicial de \$100.000 deve gerar um fluxo de caixa econômico de \$120.000 em um ano. Oitenta por cento do investimento será financiado por meio de um empréstimo contratado a juros efetivos de 15% a.a., a ser quitado em parcela única um ano depois. Considerando que o custo do capital seja de 18% a.a. e que a rentabilidade do capital próprio (requerida pelos acionistas) seja de 30% a.a., determinar a viabilidade econômica e financeira do projeto.

O quadro a seguir mostra os fluxos de caixa e sua respectiva taxa interna de retorno (TIR):

	Ano 0	Ano 1	TIR
Fluxo econômico	-\$100.000	\$120.000	20% a.a.
Fluxo financeiro	\$80.000	-\$92.000	
Fluxo econômico-financeiro	-\$20.000	\$28.000	40% a.a.

Podemos observar que o fluxo econômico não inclui os fluxos decorrentes do financiamento. Nele, o fluxo do ano 0 (\$100.000) representa o aporte total de capital, ou seja, a soma dos aportes dos acionistas e dos credores. O fluxo de caixa econômico do ano 1 representa o retorno decorrente desse aporte total e, conseqüentemente, a TIR desse fluxo (TIR_E) representará a rentabilidade do ponto de vista do projeto como um todo (acionistas e credores). Por outro lado, podemos notar também que o fluxo econômico-financeiro do ano 0 (\$20.000) representa unicamente o aporte líquido de capital próprio (dos acionistas), e o fluxo do ano 1, o retorno decorrente desse aporte. Logo, a TIR desse fluxo (TIR_F) representará a rentabilidade do projeto do ponto de vista de quem aporta o capital próprio (dos acionistas).

Como a TIR_E é maior que o custo do capital ($20\% > 18\%$), o projeto é viável do ponto de vista econômico, ou seja, ele é intrinsecamente bom para a empresa como um todo. Uma vez que a TIR_F é maior que o custo do capital próprio, ou seja, maior que o retorno mínimo exigido pelos acionistas ($40\% > 30\%$), o projeto mostra-se também viável do ponto de vista do capital próprio.

11.7 Análise das diversas variáveis e custos econômicos na determinação do fluxo de caixa incremental

Para a montagem do fluxo de caixa, é necessário entender as variáveis e os custos econômicos pertinentes à tomada de decisões de investimento de capital e também o conceito e o tratamento que devem ser dados aos diversos fatores envolvidos, tais como os

custos de oportunidade, os custos afundados, o valor de liquidação ou residual, o horizonte de tempo em que serão feitas as projeções do fluxo de caixa etc.

11.7.1 Horizonte de tempo das projeções e valor residual (liquidação) do projeto

O fluxo de caixa é construído para determinado número de períodos que dependem da capacidade do projeto de gerar renda econômica. A vida técnica dos ativos não determina necessariamente o prazo sobre o qual se devem projetar os fluxos de caixa do projeto. Por exemplo, se as máquinas para a fabricação de certo produto duram dez anos sob circunstâncias normais de uso, por que projetar o fluxo para esse prazo, se depois do segundo ano o mercado muda e não existe mais demanda pelo produto? Em suma, não há relação entre a vida útil dos ativos físicos e a renda econômica obtida em determinada atividade produtiva.

O fluxo de caixa econômico deve ser projetado para determinado horizonte de tempo razoável, chamado período de previsão explícita. A organização do fluxo de caixa é feita em períodos iguais, em que comumente os valores são lançados ao fim do período em que ocorrem. Em geral, o prazo de projeção do fluxo de caixa é dividido em anos, embora isso dependa da precisão da informação que possa ser obtida.

O valor residual ou de liquidação de um projeto a ser lançado ao término do período de previsão explícita pode ser o valor de sua liquidação física ou seu valor econômico após o término desse período. A liquidação física ocorre se for esperada uma recuperação substancial de capital pela eventual alienação dos ativos restantes ao término da vida útil. Tal recuperação pode ser resultado da venda de instalações e equipamentos, como também da liberação de capital de giro.

11.7.2 Custos de oportunidade

Os custos de oportunidade referem-se a quanto se deixa de ganhar em prol do investimento se, em vez de aplicados no projeto, os recursos forem aplicados em alternativas de risco similar. Os custos de oportunidade são um reflexo da escassez de recursos, pois, se os recursos fossem ilimitados, não haveria custos de oportunidade.

Um exemplo de custo de oportunidade é o salário alternativo, ou seja, o salário que se deixa de receber por dedicar-se a determinada atividade. Por exemplo, se um economista recém-formado decide constituir uma empresa própria e dedicar-se integralmente à sua administração, então o salário que ele poderia ganhar se procurasse um emprego no mercado de trabalho pode ser visto como um custo de oportunidade. Outros exemplos que podem ser citados são os custos de oportunidade associados à alocação de recursos que a empresa já possui, tais como terrenos, equipamentos, edifícios, mão de obra etc. Esses custos devem ser considerados no fluxo de caixa e na análise econômica com base em seu melhor uso alternativo. Por exemplo, se os edifícios já eram propriedade da empresa antes da aceitação do projeto, o custo de oportunidade adequado poderia ser seu aluguel a valores de mercado.

11.7.3 Custos afundados (*sunk cost*)

Os custos afundados correspondem a fatores irrecuperáveis ou sem alternativa de uso (custo de oportunidade igual a zero). Se, por exemplo, como parte do processo de avaliação de um projeto foram pagos \$300.000 a uma firma de consultoria pelo estudo de viabilidade, esse gasto é irrecuperável e, portanto, é um custo afundado. A decisão de gastar os \$300.000

no estudo foi por si própria uma decisão perfeitamente relevante até o gasto se tornar um custo afundado. Esse gasto não interfere na decisão de investir ou não no projeto.

Não existem bases na análise econômica que justifiquem recuperações de dispêndios já realizados e que não podem ser recuperados parcial ou totalmente. As decisões passadas simplesmente não são consideradas nas compensações econômicas da decisão de investimento presente. As decisões econômicas são sempre prospectivas e devem envolver apenas o que pode ser modificado pelos agentes decisores. Este é o teste essencial de relevância para qualquer elemento a ser incluído na análise econômica, pois infelizmente sempre há a tentação de incluir os custos afundados na tomada de decisões.

11.7.4 Efeitos derivados

Muitas vezes os fluxos de caixa de um projeto de investimento são obtidos em detrimento de outros projetos já existentes. A perda (ou ganho) em outros projetos ocasionada pela decisão de investir é comumente chamada efeito derivado ou colateral. Vamos supor que uma empresa com uma única linha de produção do produto A pretenda construir uma segunda linha para produzir também o produto B. Se houver migração de clientes do produto A para o B, com a conseqüente transferência parcial dos lucros da primeira linha para a segunda, esse efeito deverá ser considerado na decisão de investir na segunda linha de produção, pois nem todo fluxo de caixa projetado para essa linha será incremental. Ou seja, nem todo fluxo de caixa provém do próprio potencial de geração de renda econômica do projeto. Nesse caso, parte do fluxo provém desse potencial e parte não provém; parte do fluxo projetado será incremental e parte não será.

11.7.5 Dispêndios de capital

Qualquer conseqüência potencial da decisão inicial de investir deve ser considerada como parte da proposta de investimento. Assim, os dispêndios de capital a serem feitos durante a vida útil do projeto, e que constituem a base para seu contínuo funcionamento, devem ser incluídos no fluxo de caixa econômico. Muitas vezes esses dispêndios são suficientemente previsíveis e passíveis de ser estimados. Um exemplo de dispêndios de capital são os investimentos necessários para uma reforma de grande porte dos equipamentos ou para uma expansão da fábrica que permita manter o negócio lucrativo e competitivo.

11.7.6 Depreciação, amortização e exaustão

A análise de investimento envolve a utilização de dados coletados dos registros contábeis, mas nem todos os dados são relevantes na análise econômica. Convenções contábeis que não envolvem fluxos de caixa devem ser vistas com extrema precaução. No caso da depreciação, amortização e exaustão, deve ser incluído no fluxo econômico unicamente seu impacto fiscal, pois elas representam despesas não caixa. Há vários métodos de depreciação e, na prática, o mais utilizado é o método linear, que estabelece um percentual anual fixo para a depreciação.

11.7.7 Capital de giro

O capital de giro origina-se da necessidade de enfrentar a defasagem que normalmente existe entre os processos de produção e de vendas. Esse investimento é realizado no início do negócio e muda sempre que se espera uma variação no nível de vendas por aumento ou diminuição da produção.

Na estruturação do fluxo de caixa para análise econômica, já que o capital de giro representa um comprometimento de recursos muito similar ao dispêndio feito em equipamentos e instalações, ele poderá ser tratado como um fluxo recuperável ao término da vida econômica do projeto. Se for viável esperar liquidar todos os estoques e contas a receber ao término desse período, então esses fundos (líquido das contas a pagar) poderão ser considerados uma entrada de caixa naquele momento, ou seja, uma recuperação de capital. Se presumirmos que alguma fração desse capital é irrecuperável, ou que por algum motivo não possa ser recuperada ao término, então o montante a ser lançado deverá ser somente a parcela recuperável.

↑ Exemplos de aplicação

► Exemplo 11.2

Um pequeno agricultor estuda a possibilidade de investir em um projeto agrícola dedicado à produção de sementes especiais. O investimento principal será o pagamento antecipado do aluguel do terreno por quatro anos, o que implica um investimento inicial de \$12.000. A colheita será feita a cada quatro meses, produzindo uma receita quadrimestral de \$3.200 (\$9.600 por ano) e gastos operacionais de \$500/mês (\$6.000 por ano). Supondo que o projeto tenha vida útil igual ao período de aluguel do terreno, estruturar o fluxo de caixa econômico.

Com essas informações, podemos montar o seguinte fluxo de caixa:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Investimento	-\$12.000				
Receitas (a)		\$9.600	\$9.600	\$9.600	\$9.600
Gastos operacionais (b)		-\$6.000	-\$6.000	-\$6.000	-\$6.000
Mudanças no capital de giro (c)	-\$2.000				\$2.000
Fluxo de caixa	-\$14.000	\$3.600	\$3.600	\$3.600	\$5.600

(a) $3 \times \$3.200$; (b) $12 \times \$500$; (c) $4 \times \$500$

Há necessidade de um investimento inicial de \$2.000 em capital de giro correspondente aos custos operacionais dos primeiros quatro meses antes da primeira colheita. Esse capital possibilita o início das operações. Os ingressos provenientes da primeira colheita serão utilizados para cobrir os gastos operacionais da segunda, ou seja, repõe-se o capital de giro inicial. Esse processo repete-se sucessivamente. Dessa maneira, o investimento em capital de giro é realizado somente no ano 0, já que os ingressos recebidos pelas vendas permitirão sua reposição, sendo desnecessário efetuar um novo investimento. Ao fim da vida útil, o capital de giro é recuperado por seu valor inicial.

► Exemplo 11.3

Suponha que a empresa agroindustrial Agrosem S.A. pretenda comprar, processar e vender ao público as sementes produzidas por pequenos agricultores como o do exemplo anterior. A produção da empresa agroindustrial acompanhará a colheita de sementes, processando-as também três vezes ao ano (em abril, agosto e dezembro). Diferentemente dos pequenos agricultores, a empresa deverá oferecer para o mercado ao longo do ano

uma quantidade constante de sementes processadas. Por essa razão, deve manter estoques nas épocas em que não houver colheita. A empresa projeta realizar vendas mensais de \$15.000, que segundo estimativas devem aumentar em 50% a partir do terceiro ano. Os gastos em sementes equivalem a 50% das vendas. Adicionalmente, a empresa deve incorrer em gastos operacionais calculados em aproximadamente 10% das vendas. Dado que a colheita das sementes é quadrimestral, estima-se que as mudanças de capital de giro correspondam a aproximadamente 20% das mudanças nas vendas. A vida útil do projeto é de quatro anos. Pede-se projetar o fluxo de caixa.

Com essas informações, podemos montar o seguinte fluxo de caixa:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Receitas Líquidas (a)		\$180.000	\$180.000	\$270.000	\$270.000
– Matéria-prima (b)		–\$90.000	–\$90.000	–\$135.000	–\$135.000
– Gastos operacionais (c)		–\$18.000	–\$18.000	–\$27.000	–\$27.000
Mudanças no capital de giro (d)	–\$36.000		–\$18.000		\$54.000
Fluxo de caixa	–\$36.000	\$72.000	\$54.000	\$108.000	\$162.000

(a) Receitas: para os anos 1 e 2: $\$15.000 \times 12 = \180.000 ; para os anos 3 e 4: $(\$15.000 \times 1,50) \times 12 = \270.000

(b) Matéria-prima = $0,50 \times$ Receitas

(c) Gastos operacionais = $0,10 \times$ Receitas

(d) Mudanças do capital de giro em $t = 0,20 \times (\text{Receitas}_{t+1} - \text{Receitas}_t)$

No quadro, as mudanças nos requerimentos de capital de giro foram consideradas fluxos antecipados, ou seja, esses gastos incorrem no início dos respectivos anos. Assim, no início do ano 1 (final do ano 0) requerem-se 20% de \$180.000 (aumento das vendas do ano 0 para o ano 1). No ano 1, não há mudanças no capital de giro, porque não há alteração nas vendas entre os anos 1 e 2. No ano 2, requerem-se 20% de \$90.000 (aumento das vendas do ano 2 ao ano 3). Ao término da vida útil do projeto, o capital de giro é recuperado (\$36.000 + \$18.000).

11.8 Tratamento da inflação

A inflação tem impacto importante no processo de análise de investimentos e orçamentação de capital. É possível que um projeto aceito na ausência de inflação seja rejeitado se forem considerados os efeitos da inflação nos fluxos de caixa e nas taxas de desconto.

Muitas vezes, a análise de uma alternativa ou projeto de investimento envolve fluxos em valores constantes (moeda de hoje) e fluxos em valores correntes (moeda das respectivas datas). Fluxo em valores constantes é sinônimo de fluxo real, enquanto fluxo em valores correntes é sinônimo de fluxo nominal. Para sermos consistentes nos cálculos, os fluxos de caixa em valores correntes devem ser descontados a uma taxa de desconto nominal, enquanto os fluxos em valores constantes devem ser descontados a uma taxa real.

Comumente, a taxa de desconto é expressa em termos nominais, mas a taxa real pode ser estimada a partir da taxa nominal e da projeção inflacionária aplicando-se a seguinte identidade de cálculo:

$$(1 + \text{Taxa nominal}) = (1 + \text{Taxa real}) \times (1 + \text{Inflação projetada})$$

$$(1 + k_N) = (1 + k_r) \times (1 + I) \Rightarrow k_r = \frac{(1 + k_N)}{(1 + I)} - 1$$

Consideremos uma alternativa que requeira um investimento inicial de \$100 e produza um fluxo de caixa nominal de \$150 daqui a um período. Se o custo real do capital for de 10% e a inflação projetada for de 8%, o cálculo do VPL poderá ser feito de duas maneiras: descontando-se o fluxo de caixa em termos reais a uma taxa real, ou descontando-se o fluxo nominal a uma taxa nominal. Vejamos os cálculos:

- Descontando-se o fluxo de caixa em termos reais a uma taxa real:

$$\text{VPL} = -\$100 + \frac{\$150/1,08}{1,10} = \$26,26$$

- Descontando-se o fluxo nominal a uma taxa nominal:

$$\text{VPL} = -\$100 + \frac{\$150}{1,10 \times 1,08} = \$26,26$$

Constatamos que o resultado é o mesmo em ambos os modos de cálculo do VPL. Logo, poderíamos ser induzidos a imaginar que uma análise em termos nominais e reais sempre daria o mesmo resultado em termos de VPL. Este seria o caso em um contexto de efeito inflacionário neutro, em que os preços e custos são afetados por igual pela inflação. Entretanto, na realidade, dada a complexidade do processo inflacionário, isso não acontece, obrigando o analista a trabalhar com diversos índices de atualização monetária adequados para os diversos componentes do fluxo de caixa. Vejamos alguns exemplos de aplicação.

↑ Exemplos de aplicação →

► Exemplo 11.4

Considerando uma taxa nominal de 14% a.a. e uma inflação projetada de 4% a.a., provar que, se os fluxos de caixa nominais (moeda corrente) forem convertidos em fluxos reais (moeda constante), o VPL do projeto não será afetado.

- Análise em valores correntes:

Fluxo de caixa em valores correntes (fluxo nominal)

Ano 0	Ano 1	Ano 2
-\$1.000	\$600	\$650

$$\text{VPL}(14\%) = -\$1.000 + \frac{\$600}{1,14} + \frac{\$650}{(1,14)^2} = \$26,47$$

O VPL foi calculado com a taxa nominal. Os fluxos de caixa nominais são realizados em datas futuras e estabelecidos em moeda das respectivas datas (moeda corrente).

- Análise em valores constantes:

Fluxo de caixa em valores constantes (fluxo real)

Ano 0	Ano 1	Ano 2
-\$1.000	\$600/1,04 = \$576,92	\$650/(1,04) ² = \$600,96

- Custo real do capital:

$$k_r = \frac{1 + k_N}{1 + I} - 1 = \frac{1,14}{1,04} - 1 = 9,62\% \text{ a.a.}$$

- Valor presente líquido:

$$\text{VPL}(9,62\%) = -\$1.000 + \frac{\$576,92}{1,0962} + \frac{\$600,96}{(1,0962)^2} = \$26,47$$

Os fluxos de caixa em valores constantes são realizados em datas futuras, mas estabelecidos em moeda constante (moeda de hoje). Foram determinados deflacionando-se os fluxos nominais pela taxa de inflação projetada. O VPL foi calculado com a taxa real.

► Exemplo 11.5

Uma empresa pretende investir \$100.000 em um projeto para produzir um novo produto. Dispõe-se das seguintes informações:

- investimento = \$100.000;
- vida útil do projeto = três anos (sem valor residual);
- custo do capital (k_N) = 12% a.a. (taxa nominal);
- preço unitário do produto (P) hoje = \$10/unidade;
- produção (Q) = 6.000 unidades/ano (constante);
- custos totais de produção (CT) = \$10.000/ano;
- taxa de inflação projetada: 10% a.a. (constante).

Considerando que o preço do produto e os custos acompanharão a inflação projetada e que a produção permanecerá constante, verificar a viabilidade econômica do projeto por meio de uma análise em valores constantes e em valores correntes. Para simplificar, assuma que o fluxo de caixa seja basicamente igual às receitas menos os custos totais e que não haja efeitos fiscais.

- Análise em valores constantes (a preços de hoje):

$$\begin{aligned} \text{Fluxo de caixa} &= \text{Receitas} - \text{Custos totais} \\ &= P \times Q - \text{CT} \\ &= \$10/\text{unid.} \times 6.000 \text{ unid./ano} - \$10.000/\text{ano} = \$50.000/\text{ano} \end{aligned}$$

- Custo real do capital:

$$k_r = \frac{1 + k_N}{1 + I} - 1 = \frac{1,12}{1,10} - 1 = 1,8182\% \text{ a.a.}$$

- O fluxo de caixa expresso em valores constantes deve ser descontado ao custo real do capital:

$$\begin{aligned} \text{VPL}(1,8182\%) &= -\$100.000 + \$50.000 \times a_{\overline{3}|1,8182\%} \\ &= -\$100.000 + \$50.000 \times 2,89413 = \$44.706 > 0 \end{aligned}$$

- Análise em valores correntes (a preços das respectivas datas):

Nesse caso, os fluxos de caixa devem refletir o poder aquisitivo da moeda, ou seja, os preços e custos devem ser inflacionados. O quadro a seguir apresenta os cálculos.

	Ano 1	Ano 2	Ano 3
+ Receitas (P × Q)	$10 \times 1,1 \times \$6.000 = \66.000	$10 \times (1,1)^2 \times \$6.000 = \$72.600$	$10 \times (1,1)^3 \times \$6.000 = \$79.860$
– Custo total (CT)	$-\$10.000 \times 1,1 = -\11.000	$-\$10.000 \times (1,1)^2 = -\12.100	$-\$10.000 \times (1,1)^3 = -\13.310
Fluxo de caixa	\$55.000	\$60.500	\$66.550

Fluxos a preços correntes devem ser descontados ao custo nominal (aparente) do capital:

$$\text{VPL}(12\%) = -\$100.000 + \frac{\$55.000}{(1,12)} + \frac{\$60.500}{(1,12)^2} + \frac{\$66.550}{(1,12)^3} = \$44.706 > 0$$

Constata-se que, em ambas as formas de análise, em valores correntes e em valores constantes, o VPL é o mesmo. Isso se deve à suposição de que tanto os custos quanto os preços acompanharão por igual a inflação.

► Exemplo 11.6

Uma empresa pretende investir \$5.000.000 em uma planta para produzir 45.000 unidades/ano de bobinas elétricas. O preço atual de venda das bobinas é de \$125/unidade, sendo esperado um incremento de 9% ao ano nesse preço. O custo total de produção é de \$70/unidade, sendo esperado um incremento de 2% ao ano nesse custo. Considerando uma inflação projetada de 6% a.a., um custo do capital (taxa nominal) de 11% a.a. e vida útil do projeto de dois anos, calcular o VPL com base no fluxo nominal e no fluxo real. Não considere o valor residual nem os efeitos fiscais.

- Fluxo de caixa em valores correntes (fluxo nominal):

	Ano 0	Ano 1	Ano 2
– Investimentos	–\$5.000.000		
+ Receitas		$45.000 \times \$125 \times (1,09) = \$6.131.250$	$45.000 \times \$125 \times (1,09)^2 = \$6.683.062$
– Custos		$-45.000 \times \$70 \times (1,02) = -\$3.213.000$	$-45.000 \times \$70 \times (1,02)^2 = -\$3.277.260$
Fluxo de caixa	–\$5.000.000	\$2.918.250	\$3.405.802

Valor presente líquido:

$$\text{VPL}(11\%) = -\$5.000.000 + \frac{\$2.918.250}{(1,11)} + \frac{\$3.405.802}{(1,11)^2} = \$393.280$$

- Fluxo de caixa em valores constantes (fluxo real):

Ano 0	Ano 1	Ano 2
–\$5.000.000	$\$2.918.250 / 1,06 = \$2.753.066$	$\$3.405.802 / (1,06)^2 = \$3.031.152$

Custo real do capital e cálculo do VPL:

$$k_r = \frac{1 + k_N}{1 + I} - 1 = \frac{1,11}{1,06} - 1 = 4,7170\% \text{ a.a.}$$

$$\text{VPL}(4,7170\%) = -\$5.000.000 + \frac{\$2.753.066}{(1,047170)} + \frac{\$3.031.152}{(1,047170)^2} = \$393.280$$

11.9 Decisões de investimento em moeda nacional e em moeda estrangeira

Em algumas situações, é preciso efetuar uma análise comparativa de oportunidades de investimento no país e no exterior. Esse tipo de análise está sujeito ao tipo de câmbio que relaciona as moedas dos países à taxa de inflação nacional e à taxa de desvalorização cambial da moeda nacional perante a moeda estrangeira. O exemplo seguinte ilustra o tipo de tratamento que deve ser dado nessas situações.

Exemplo de aplicação

Exemplo 11.7

Uma pessoa pretende investir \$500.000 nos próximos dois anos. Dispõe de duas opções de investimento: a) um depósito a prazo fixo em um banco de Miami, que rende juros de 6% a.a. em dólares correntes; b) um depósito a prazo fixo em reais em um banco do Rio de Janeiro, que rende três pontos percentuais acima da inflação anual. Projeta-se uma inflação anual de 9% nesse prazo no Brasil e espera-se que o real enfrente um ritmo de desvalorização perante o dólar de 7% a.a. nos próximos dois anos. Atualmente as moedas se relacionam de acordo com o câmbio: \$2 = US\$1. Determinar a melhor opção de investimento.

- O quadro a seguir mostra a análise da primeira alternativa:

	Ano 0	Ano 2
Reais	\$500.000	\$643.205 (d)
Tipo de câmbio	2,0	2,2898 (c)
Dólares	US\$250.000 (a)	US\$280.900 (b)
Rentabilidade nominal anual		13,42% a.a. (e)
Rentabilidade real anual		4,06% a.a. (f)

(a) \$500.000 / 2,0; (b) US\$250.000 × (1,06)²; (c) 2,0 × (1,07)²; (d) US\$280.900 × 2,2898; (e) (643.205 / 500.000)^{1/2} - 1; (f) 1,1342/1,09 - 1

- O quadro a seguir mostra a análise da segunda alternativa:

	Ano 0	Ano 2
Reais	\$500.000	\$627.200 (a)
Rentabilidade nominal anual		12,00% a.a. (b)
Rentabilidade real anual		2,75% a.a. (c)

(a) $\$500.000 \times (1,12)^2$; (b) $(\$627.200 / \$500.000)^{1/2} - 1$; (c) $1,12 / 1,09 - 1$

Conclui-se, portanto, que a melhor alternativa é aplicar em Miami (para quem pode, é claro), pois a rentabilidade real é maior em relação ao investimento no banco carioca.

11.10 Montagem do fluxo de caixa para avaliação econômica de projetos de investimento

Nesta seção, veremos como os fluxos necessários para análise econômica são estruturados e agregados para efeitos de avaliação. O processo certamente será mais bem entendido por meio de exemplos ilustrativos que ajudarão a apresentar e discutir diferentes detalhes, conceitos, princípios e ideias relacionados à estruturação do fluxo de caixa para análise econômica.

Vejam os seguintes exemplos de aplicação em que, para simplificar, consideramos que o investimento inicial seja efetuado totalmente logo no início do primeiro ano (ano 0).

↑ Exemplo de aplicação

▶ Exemplo 11.9

Uma empresa estuda a substituição de uma máquina antiga por um modelo mais moderno. Estima-se que a máquina a ser substituída ainda possa ser usada por mais cinco anos antes de tornar-se imprésta e que seu valor contábil seja de \$15.000 depreciáveis linearmente em \$3.000/ano. Caso seja substituída, a máquina poderá ser vendida no mercado de máquinas usadas por \$18.000. A máquina nova custa \$300.000, tem vida útil de dez anos e será depreciada linearmente. Admite-se que possa ser usada até o término de sua vida útil ou que possa ser vendida antes por um valor equivalente ao seu valor contábil na data da venda. O quadro a seguir apresenta informações sobre capacidade, custos, necessidade de mão de obra direta, matéria-prima usada, despesas de vendas e preço de venda do produto produzido, para ambos os equipamentos.

Máquina	Capacidade de produção (unidades/ano)	Mão de obra (número de operários necessários)	Matéria-prima (\$/unidade)	Despesas fixas em vendas (\$/ano)	Preço de venda do produto fabricado (\$/unidade)
Nova	100.000	3	0,5	\$6.000	\$3,00
Antiga	80.000	5	0,7	\$4.000	\$2,50

O custo de mão de obra por operário é de \$6.000/ano. Considerando efeitos fiscais instantâneos, montar o fluxo de caixa e efetuar a análise econômica a um custo do capital de 15%.

• **Horizonte de planejamento:**

As duas alternativas serão comparáveis somente durante os próximos cinco anos, prazo que corresponde ao período em que a máquina antiga ainda poderá operar.

• **Fluxo de caixa econômico:**

O quadro a seguir mostra o fluxo de caixa econômico incremental durante os cinco primeiros anos da máquina nova (tempo de comparação):

Fluxo de caixa (\$)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Liquidação
Investimento	-282.900 (a)						150.000 (b)
Aumento de receitas (c)		100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	
Economia de mão de obra (d)		12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	
Economia de matéria-prima (e)		6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	
- Despesa de vendas (f)		-2.000	-2.000	-2.000	-2.000	-2.000	
- Depreciação diferencial (g)		-27.000	-27.000	-27.000	-27.000	-27.000	
Lucro tributável		89.000	89.000	89.000	89.000	89.000	
- Impostos (30%)		-26.700	-26.700	-26.700	-26.700	-26.700	
+ Depreciação diferencial (h)		27.000	27.000	27.000	27.000	27.000	
Fluxo econômico	-282.900	89.300	89.300	89.300	89.300	89.300	150.000

(a) Investimento inicial líquido:

$$\begin{aligned} & \text{Custo da máquina nova} \dots \$300.000 \\ & \text{Caixa pela venda da máquina antiga} \dots (\$18.000) \\ & \text{Imposto a pagar pelo ganho de capital na venda da máquina antiga} \dots \underline{\$900} \\ & \text{Investimento inicial líquido} \dots \$282.900 \end{aligned}$$

O ganho de capital é calculado pela diferença entre o valor de venda da máquina antiga e seu valor contábil atual ($\$18.000 - \15.000). O imposto a pagar incidirá sobre esse valor: $0,3 \times \$3.000 = \900 .

(b) Valor residual (valor de liquidação):

O valor de liquidação a ser lançado ao término do quinto ano será igual ao valor contábil daquela época, ajustado para imposto sobre ganhos de capital na venda. No caso, não há imposto a pagar, pois o valor de venda é igual ao valor contábil:

$$\begin{aligned} & \text{Caixa pela venda da máquina nova: } (\$300.000 - 5 \times \$300.000/10) \dots \$150.000 \\ & \text{Imposto pelo ganho de capital na venda: } 0,30 \times (\$150.000 - \$150.000) \dots \underline{\$0} \\ & \text{Valor residual ou de liquidação da máquina nova} \dots \$150.000 \end{aligned}$$

Nesse caso, não há ganho nem perda de capital, pois o valor de venda (no ano 5) da máquina nova ($\$150.000$) é o próprio valor contábil daquele ano ($\$150.000$).

(c) $100.000 \text{ unidades} \times \$3/\text{unidade} - 80.000 \text{ unidades} \times \$2,50/\text{unidade} = \$100.000/\text{ano}$

(d) $(5 \text{ operários} - 3 \text{ operários}) \times \$6.000/\text{operário} = \$12.000/\text{ano}$

(e) $80.000 \text{ unidades} \times \$0,70/\text{unidade} - 100.000 \text{ unidades} \times \$0,50/\text{unidade} = \$6.000/\text{ano}$

(f) $\$4.000/\text{ano} - \$6.000/\text{ano} = -\$2.000/\text{ano}$

(g) $(\$300.000/10 - \$3.000) = \$27.000/\text{ano}$

(h) A depreciação é somada novamente por não ser um fluxo de caixa.

- **Avaliação econômica:**

Pelo VPL:

$$\text{VPL} (15\%) = -\$282.900 + \$89.300 \times a_{\overline{5}|15\%} + \frac{\$150.000}{(1,15)^5} = \$91.024 > 0$$

Pela TIR:

$$-\$282.900 + \frac{\$89.300}{(1 + \text{TIR})} + \dots + \frac{\$89.300}{(1 + \text{TIR})^5} + \frac{\$150.000}{(1 + \text{TIR})^5} = 0$$

$$\Rightarrow \text{TIR} = 25,95\% > 15\%$$

Os indicadores da análise econômica mostram que a substituição da máquina procede. A análise sugere que a substituição é desejável, pelo menos em uma base numérica.

11.11 Incrementalidade dos fluxos de caixa e efeitos fiscais

Por questões didáticas e visando mostrar melhor o sentido de incrementalidade e explicitar os efeitos fiscais dos diversos fluxos, nesta seção vamos separar os efeitos fiscais dos fluxos criando uma rubrica especial chamada efeitos fiscais. No exemplo a seguir, usamos essa abordagem, um pouco diferente da utilizada no exemplo anterior, mas certamente com resultados similares.

↑ Exemplo de aplicação →

► Exemplo 11.9

Uma empresa industrial estuda a substituição de um motor a energia elétrica por outro a gás natural. O motor a energia elétrica pode ser usado por mais quatro anos antes de se tornar imprestável. Atualmente, seu valor contábil é de \$8.000, que pode ser depreciado linearmente em quatro anos; contudo, será vendido por \$9.000 no mercado de equipamentos usados no momento da compra do novo equipamento. O motor a gás natural custa \$24.000 e poderá operar e ser depreciado ao longo de oito anos. Admite-se que possa ser vendido por 20% a mais que seu valor contábil se for alienado antes do término de sua vida útil. Em comparação com o motor a energia elétrica, o motor a gás natural gerará uma economia operacional de \$9.500/ano. A alíquota de IR é de 30%, o custo do capital é de 13% a.a. e a rentabilidade mínima exigida pelos acionistas (custo do capital próprio) é de 45% a.a. Quarenta por cento do valor do novo equipamento será financiado por meio de um empréstimo que será pago em três prestações anuais pela Tabela Price a juros de 15% a.a. Pede-se: montar o fluxo de caixa incremental e analisar a viabilidade econômica e financeira do projeto.

- **Horizonte de planejamento e valor de liquidação:**

Como a máquina antiga pode operar somente por mais quatro anos, e a vida útil da máquina nova é de oito anos, os dois investimentos serão comparáveis somente durante os quatro primeiros anos. Assim, a comparação econômica para a decisão de substituição será feita apenas para os primeiros quatro anos.

• **Fluxo de caixa econômico-financeiro:**

No quadro a seguir, apresentamos o fluxo econômico e o fluxo econômico-financeiro com inclusão dos fluxos da dívida, explicitando e separando o efeito fiscal de cada fluxo.

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Liquidação
Compra do novo equipamento	-\$24.000					\$14.400 (g)
Venda do equipamento antigo	\$9.000					
Diminuição dos custos		\$9.500	\$9.500	\$9.500	\$9.500	
Efeitos fiscais						
Da venda do equipamento antigo	-\$300 (a)					
Da venda do equipamento novo						-\$720 (b)
Da diminuição dos custos (c)		-\$2.850	-\$2.850	-\$2.850	-\$2.850	
Da depreciação diferencial (d)		\$300	\$300	\$300	\$300	
FLUXO ECONÔMICO	-\$15.300	\$6.950	\$6.950	\$6.950	\$6.950	\$13.680
Financiamento tomado	\$9.600 (e)					
Prestações pagas		-\$4.205	-\$4.205	-\$4.205		
Benefício fiscal dos juros (f)		\$432	\$308	\$165		
FLUXO ECONÔMICO-FINANCEIRO	-\$5.700	\$3.177	\$3.053	\$2.910	\$6.950	\$13.680

(a) Imposto sobre ganho de capital na venda do equipamento antigo = $(\$9.000 - \$8.000) \times 0,30$

(b) Imposto sobre ganho de capital na venda do equipamento novo no fim do 4º ano = $(\$14.400 - \$12.000) \times 0,30$

(c) $\$9.500 \times 0,30$

(d) $(\$24.000/8 - \$8.000/4) \times 0,30 = \$300$

(e) Financiamento tomado (40% do valor do novo equipamento) = $0,40 \times \$24.000$

(f) Benefício fiscal dos juros = $0,30 \times$ juros de cada período

(g) O valor de liquidação da máquina nova no 4º ano é 20% maior que seu valor contábil naquele ano: $1,2 \times \$12.000$.

Quadro de amortização do financiamento – Tabela Price

Ano	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	\$9.600			
1	\$6.835	\$2.765	\$1.440	\$4.205
2	\$3.656	\$3.180	\$1.025	\$4.205
3		\$3.656	\$549	\$4.205

• **Avaliação econômica (perspectiva da firma):**

Pelo VPL:

$$\begin{aligned} \text{VPL}(13\%) &= -\$15.300 + \frac{\$6.950}{(1,13)} + \frac{\$6.950}{(1,13)^2} + \frac{\$6.950}{(1,13)^3} + \frac{\$6.950}{(1,13)^4} + \frac{\$13.680}{(1,13)^4} = \\ &= \$13.762,78 > 0 \end{aligned}$$

Pela TIR:

$$\begin{aligned} -\$15.300 + \frac{\$6.950}{(1 + \text{TIR})} + \frac{\$6.950}{(1 + \text{TIR})^2} + \frac{\$6.950}{(1 + \text{TIR})^3} + \frac{\$6.950}{(1 + \text{TIR})^4} + \frac{\$13.680}{(1 + \text{TIR})^4} = 0 \\ \Rightarrow \text{TIR} = 44,01\% > 13\% \end{aligned}$$

Como a TIR calculada sobre o fluxo econômico é maior que o custo do capital (44,01% > 13%), a substituição do equipamento é economicamente viável. Podemos observar no quadro do fluxo de caixa que o fluxo econômico do ano 0 representa o capital total empregado no projeto (aporte dos acionistas mais aporte de terceiros) e, consequentemente, os fluxos dos anos posteriores estão disponíveis tanto para os acionistas quanto para os credores. Logo, a TIR desse fluxo mede a rentabilidade do capital total empregado (perspectiva da firma) e deve ser comparada com o custo de oportunidade do capital, pois essa taxa reflete o custo do capital total que é a soma do capital aportado pelos acionistas (capital próprio) mais o capital aportado pelos credores (dívida).

- **Análise da viabilidade econômico-financeira (perspectiva dos acionistas):**

Cálculo da TIR:

$$-\$5.700 + \frac{\$3.177}{(1 + \text{TIR})^1} + \frac{\$3.053}{(1 + \text{TIR})^2} + \frac{\$2.910}{(1 + \text{TIR})^3} + \frac{\$6.950}{(1 + \text{TIR})^4} + \frac{\$13.680}{(1 + \text{TIR})^4} = 0$$

$$\Rightarrow \text{TIR} = 73,25\% > 45\%$$

O custo do capital próprio (45%) é a rentabilidade mínima esperada pelos detentores do capital próprio (acionistas). Logo, como a TIR calculada sobre o fluxo econômico-financeiro é maior que essa taxa, podemos dizer que, do ponto de vista dos acionistas, o projeto é rentável.

A análise da viabilidade financeira do projeto é um passo posterior à análise de sua viabilidade econômica. Depois de analisar o potencial do projeto em gerar renda econômica suficiente para remunerar adequadamente o capital empregado, deve-se avaliar se o projeto gera renda suficiente para pagar também os compromissos assumidos no financiamento. Para tanto, é necessário incluir sobre o fluxo econômico os fluxos relativos ao financiamento tomado. Observa-se no quadro que o fluxo econômico-financeiro do ano 0 representa unicamente o aporte dos acionistas (capital próprio), consequentemente os fluxos dos anos posteriores são fluxos disponíveis somente para eles, pois os juros e amortizações do financiamento já foram subtraídos. A TIR calculada com base nesse fluxo deve ser comparada com o custo do capital próprio, pois mede a rentabilidade do projeto do ponto de vista dos acionistas.

11.12 Ponto de equilíbrio econômico

Define-se o ponto de equilíbrio operacional (PE) como o nível de vendas em que o Lajir (lucro antes de juros e IR) iguala-se a zero. À medida que o volume das operações desloca-se para cima do ponto de equilíbrio, surgem lucros crescentes, ao passo que abaixo desse ponto ocorrem prejuízos cada vez maiores. Logo, podemos igualar o Lajir a zero e destacar uma expressão para o ponto de equilíbrio:

Lajir = Receitas – Custo total

$$= P \times Q - (\text{Custo variável total} + \text{Custo fixo} + \text{Depreciação})$$

$$= P \times Q - (C_v \times Q + CF + Dep) = 0 \Rightarrow PE = \frac{CF + Dep}{P - C_v} = \frac{CFT}{P - C_v}$$

onde:

PE = ponto de equilíbrio;

P = preço unitário;

C_v = custo variável unitário;

Dep = depreciação;

CF = custo fixo (sem a depreciação);

CFT = custo fixo total (com a depreciação);

Q = volume de vendas;

P – C_v = margem de contribuição unitária.

A expressão do PE representa um ponto de equilíbrio contábil que não inclui custos de oportunidade econômicos.

Operar acima do ponto de equilíbrio contábil não significa necessariamente que a empresa vai satisfazer as expectativas dos acionistas em relação ao custo de oportunidade dos recursos aplicados, pois o cálculo do PE contábil não inclui esse custo de oportunidade. No ponto de equilíbrio contábil, as vendas cobrem apenas os custos e as despesas fixas e variáveis (incluída a depreciação), mas não incluem o custo de oportunidade do capital investido. A fim de refletir sobre esse custo, faz-se necessário que a fórmula do PE contábil seja ajustada, substituindo-se a depreciação pelo valor de um custo anual equivalente (CAE), calculado com base no investimento inicial e no custo de oportunidade do capital. Ajustado dessa forma, o PE, além de cobrir os custos fixos e variáveis, dará também cobertura ao custo de oportunidade do capital investido.

$$\text{Ponto de equilíbrio econômico: } PE = \frac{CF + CAE}{P - C_v}$$

onde:

CF = custo fixo (sem a depreciação);

CAE = custo anual equivalente;

P – C_v = margem de contribuição unitária.

↑ Exemplos de aplicação →

► Exemplo 11.10

Determinar o ponto de equilíbrio contábil para um projeto de investimento, considerando um preço unitário de venda de \$12/unidade e os seguintes custos associados a um volume de produção de 100.000 unidades:

	Custos fixos	Custos variáveis
Mão de obra direta		\$ 200.000
Matéria-prima direta		\$ 500.000
Custos indiretos de produção	\$150.000	\$ 100.000
Despesas de vendas	\$ 40.000	\$ 120.000
Total	\$ 190.000	\$ 920.000

Cálculo do PE contábil em unidades:

$$PE = \frac{CFT}{P - C_v} = \frac{190.000}{12 - (920.000 / 100.000)} = 67.857 \text{ unidades}$$

► Exemplo 11.11

Uma pessoa deve decidir entre comprar um veículo e continuar usando táxi para se locomover. O veículo que pretende comprar tem as seguintes características:

Preço do veículo	\$25.000
Tempo de vida útil do veículo	5 anos
Gastos mensais em estacionamento	\$300
Gasto anual com seguros	\$3.000
Rendimento por litro de combustível	10 quilômetros por litro (ao custo de \$3,80 por litro)
Gastos de manutenção por km	\$1
Consumo de óleo	1 litro para cada 1.000 quilômetros rodados
Custo do óleo	\$10/litro

Considerando que o preço do táxi seja de \$2 por quilômetro rodado e que o dinheiro investido na compra do veículo possa ser aplicado em alternativas de risco similar que rendam 20% a.a. (custo de oportunidade do capital), determinar o ponto de equilíbrio contábil e econômico do empreendimento

• Ponto de equilíbrio contábil

Considerando-se ano comercial de 360 dias, no quadro a seguir calculam-se o custo fixo por dia e o custo variável por quilômetro.

Custos	Custo fixo total por dia	Custo variável por quilômetro
Rateio ao dia do custo do automóvel	$\$25.000 / (5 \times 360) = \$13,88$	
Rateio ao dia do custo do seguro	$\$3.000 / 360 = \$8,33$	
Rateio ao dia do custo do estacionamento	$\$300 / 30 = \$10,00$	
Rateio por km do custo do combustível		$\$3,80 / 10 = \$0,38$
Rateio por km do custo do óleo		$\$10 / 1.000 = \$0,01$
Rateio por km dos gastos de manutenção		\$1,00
Total	\$32,21	\$1,39

O ponto de equilíbrio contábil é calculado a seguir:

$$PE = \frac{CFT}{P - C_v} = \frac{\$32,21 / \text{dia}}{\$2,0/\text{km} - \$1,39/\text{km}} = 52,80 \text{ km/dia}$$

Pode-se concluir que, se a pessoa rodar por dia menos de 52,80 quilômetros, melhor será ela continuar usando táxi e desistir da compra do veículo próprio. O custo fixo diário

do veículo foi considerado igual à depreciação diária, calculada pela simples divisão do custo do veículo pelo seu tempo de vida útil.

• **Ponto de equilíbrio econômico**

Um cálculo mais adequado à análise e decisão econômica deverá considerar necessariamente a remuneração do capital investido na compra do veículo (custo de oportunidade do capital). Isso significa que a decisão correta deverá ser tomada com base em um ponto de equilíbrio econômico, e não meramente contábil.

O ponto de equilíbrio econômico é calculado a seguir:

$$\begin{aligned} PE &= \frac{CF + CAE}{P - Cv} = \frac{(CFT - \text{Depreciação}) + CAE}{P - Cv} \\ &= \frac{(\$32,21/\text{dia} - \$13,88/\text{dia}) + \$23,22/\text{dia}}{\$2,0/\text{km} - \$1,39/\text{km}} = 68,12 \text{ km/dia} \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} CAE &= \frac{\text{Custo do veículo}}{a_{n|k\%}} = \frac{\$25.000}{a_{5|20\%}} = \frac{\$25.000}{2,99061} \\ &= \$8.359,49/\text{ano} \quad (\$8.359,49/360 = \$23,22/\text{dia}) \end{aligned}$$

onde:

$$a_{n|k\%} = \left[\frac{(1+k)^n - 1}{(1+k)^n \times k} \right] = \left[\frac{(1,20)^5 - 1}{(1,20)^5 \times 0,20} \right] = 2,99061$$

No cálculo do PE econômico, a depreciação diária do veículo foi substituída pelo CAE (custo anual equivalente). Desse modo, o PE econômico passa a considerar também a remuneração alternativa do capital investido na compra do veículo (custo de oportunidade do capital).

Exercícios propostos

1. A compra de um equipamento com vida útil de três anos e sem valor residual exige um investimento inicial de \$1.180.000. O equipamento permitirá diminuir os custos operacionais em \$388.000/ano e aumentar a receita operacional em \$210.000/ano. Se a alíquota de IR for de 30% e o custo do capital for de 10%, calcular o VPL e a TIR do projeto. Ele se justifica do ponto de vista econômico? (*Observação:* considerar os efeitos fiscais dos fluxos de caixa; por exemplo, efeito fiscal devido ao aumento da receita, diminuição de custos, aumento da depreciação.)
2. Uma empresa estuda a compra de determinado equipamento que permite uma redução de custos no seu processo operacional. O preço do equipamento é de \$5.000 e a vida útil é de cinco anos, com valor

residual igual a 10% do valor de aquisição. Se o custo de oportunidade do capital for de 10% a.a., de quanto deve ser no mínimo a redução anual de custos proporcionada pelo equipamento, de modo que se justifique a compra? Desconsidere todo tipo de efeito fiscal.

3. Uma empresa pretende investir \$220.000 na compra de um equipamento com vida útil de quatro anos, sem nenhum valor residual de liquidação. O equipamento deve proporcionar uma diminuição nos custos operacionais da ordem de \$52.000/ano e um incremento na receita operacional da ordem de \$30.000/ano. Se a alíquota de IR for de 30% e seu custo do capital for de 12% a.a., analisar a viabilidade econômica do projeto pelo critério da TIR.
4. Uma empresa estuda a possibilidade de substituir uma bateria de tornos mecânicos por outra com comando numérico. Se forem substituídos, os tornos mecânicos poderão ser vendidos hoje no mercado de ativos usados por seu valor contábil de \$21.000, caso contrário poderão operar por apenas mais quatro anos. O valor contábil dos tornos mecânicos pode ser depreciado linearmente em três anos. O valor da nova bateria de tornos com comando numérico é de \$200.000, com vida útil de dez anos e depreciáveis pelo mesmo período. Admite-se que o novo equipamento possa ser vendido em qualquer ano ao longo de sua vida útil, por um preço 30% maior que o seu valor contábil naquele ano. Espera-se que a substituição do equipamento acarrete uma diminuição nos custos operacionais da ordem de \$30.000/ano e um aumento nas necessidades de capital de giro da ordem de \$5.000 (considerado o investimento inicial). Para executar o projeto, a empresa pretende levantar um empréstimo de \$160.000, que será quitado por meio de três prestações anuais, segundo a Tabela Price, a juros de 10% a.a. Considerando um custo do capital de 12% a.a. e uma alíquota de IR de 30%, analisar o projeto e determinar sua viabilidade econômico-financeira.
5. A instalação de um moderno equipamento de trituração de minério orçado em \$28 milhões possibilitará que uma mina opere por mais quatro anos antes de encerrar suas operações por esgotamento da jazida. O equipamento adquirido será depreciado linearmente em dois anos (vida útil), sem valor residual ao término desse período. Atualmente, a receita operacional e os custos operacionais totalizam \$60 milhões/ano e \$6 milhões/ano, respectivamente. Um estudo indica que a instalação do novo equipamento incrementará a receita operacional em 30%, diminuirá os custos operacionais em 10% e exigirá um investimento adicional de \$3 milhões em capital de giro. Considerando uma alíquota de IR de 30% e o custo do capital de 12% a.a., analisar a viabilidade econômica da aquisição do equipamento.
6. Uma empresa pretende trocar uma prensa hidráulica antiga por outra nova. O valor do novo equipamento é de \$60.000, depreciável linearmente ao longo de sua vida útil de seis anos. O novo equipamento poderá operar até o término de sua vida útil ou ser vendido em qualquer época por um preço igual ao seu valor contábil naquela data. O equipamento antigo ainda poderá ser usado por mais três anos, mas será vendido no mercado de equipamentos usados por \$10.000 no ato da compra do novo. Atualmente, seu valor contábil é de \$6.000, que pode ser depreciado linearmente em três anos. Um estudo realizado indica que o novo equipamento incrementará a receita operacional em \$30.000/ano e diminuirá os custos operacionais em \$4.000/ano. Cinquenta por cento do valor do novo equipamento serão recursos provenientes de um empréstimo a juros efetivos de 15% a.a., reembolsável em três prestações anuais de acordo com a Tabela Price. A alíquota de IR é de 30% e o custo do capital é de 20% a.a. O projeto é viável do ponto de vista econômico? E do ponto de vista dos acionistas da empresa? Suponha um custo do capital de 20% a.a. e um custo do capital próprio de 22% a.a.
7. Uma indústria pretende investir \$4 milhões na compra de um equipamento. A vida útil do equipamento é de quatro anos, e ele será instalado em um terreno da própria empresa, cujo valor de mercado é de \$1 milhão. Ao término da vida útil estará contabilmente depreciado, mas naquela data poderá ser liquidado por \$1,2 milhão no mercado de equipamentos usados. A receita operacional projetada obtida da operação do equipamento é de \$2 milhões/ano, com custos operacionais de \$0,4 milhão/ano e gastos indiretos de \$0,2 milhão/ano. As necessidades de capital de giro serão de 15% sobre os incrementos das vendas. A alíquota de IR é 30%. Montar o fluxo de caixa econômico do projeto.

8. Uma empresa do setor de confecções contratou, ao custo de \$30.000, uma empresa de consultoria para efetuar o estudo de viabilidade da modernização de sua atual linha de produção de calças jeans. O estudo estimou que, com os equipamentos atuais, a linha de produção conseguirá operar por apenas mais quatro anos antes de se tornar antieconômica. Os atuais equipamentos têm valor contábil de \$200.000, que pode ser depreciado linearmente em quatro anos. Se forem substituídos agora, esses equipamentos poderão ser vendidos por \$250.000 no mercado de ativos usados. A modernização da linha de produção requer a compra de novos equipamentos orçados em \$1.500.000, permitindo que a linha de produção opere por mais seis anos a partir do momento em que os equipamentos forem adquiridos. Estima-se que os novos equipamentos tenham vida útil de seis anos, podendo ser usados até o término desse prazo ou substituídos e vendidos em qualquer época por um valor 10% abaixo do seu valor contábil naquela data. Admitindo depreciação linear, alíquota de IR de 30% e custo de oportunidade do capital de 20% a.a., efetuar a análise econômica do empreendimento.

O quadro a seguir apresenta informações sobre capacidade de produção, custos fixos, custos variáveis e preço de venda do produto produzido antes e depois da modernização. Montar o fluxo de caixa e efetuar a análise econômica do projeto de modernização.

Situação	Capacidade de produção	Custos variáveis de produção	Custos fixos de produção	Preço de venda
Antes	200.000 unidades/ano	\$2,00/unidade	\$350.000/ano	\$4,00/unidade
Depois	300.000 unidades/ano	\$1,50/unidade	\$300.000/ano	\$4,50/unidade

9. Uma empresa da área metal-mecânica estuda a modernização de sua principal linha de produção, que fabrica rolamentos. Basicamente, o projeto consiste na substituição do principal equipamento da linha por um equipamento tecnologicamente mais moderno e eficiente. Para tanto, ao custo de \$200.000, a empresa contratou a Balman Consultores Associados Ltda. para fazer o estudo de viabilidade. O referido estudo mostrou que o equipamento adequado custa \$24.000.000 e estimou, por informações do fabricante, que ele poderá ser utilizado operacionalmente durante seis anos. O estudo da consultoria, juntamente com o departamento de engenharia da empresa, determinou que o atual equipamento poderia, se fosse o caso, ser usado por mais quatro anos até tornar-se impréstável. Segundo o departamento de contabilidade da empresa e o relatório da consultoria, o valor contábil atual do equipamento é de \$4.000.000, depreciável linearmente nesse prazo. O equipamento poderia ser vendido por \$6.000.000 no mercado de equipamentos usados. O estudo estimou, por comparação, que o novo equipamento poderia ser vendido em qualquer época por um valor 50% maior que seu valor contábil naquela época.

O quadro seguinte apresenta informações do relatório da consultoria sobre o equipamento atual e o novo:

Equipamento	Produção (unidades/ano)	Custo operacional fixo por ano	Custos variáveis unitários (\$/unidade)	Preço de venda unitário
Novo	2.000.000	\$9.800.000	\$6,60	\$14
Atual	1.600.000	\$12.200.000	\$5,00	\$10

Dada a maior produção decorrente do novo equipamento, a Balman estima ser necessário um investimento adicional no capital de giro da empresa da ordem de \$3.000.000. A consultoria recomenda que a compra do equipamento seja financiada em 40% por meio de um empréstimo a juros de 12% a.a. amortizável em dez anos pelo Sistema de Amortizações Constantes. A consultoria usou como custo do capital da empresa 20% a.a. e estimou que os acionistas requeiram uma rentabilidade mínima esperada de 25%. A alíquota de IR é de 34% e admite-se que a empresa possa quitar integralmente o saldo devedor do empréstimo em qualquer época. Pede-se replicar a análise de viabilidade econômica e financeira do relatório apresentado pela consultoria. O que você acha que a consultoria recomendou à empresa com relação ao projeto?



APÊNDICE

Matemática financeira com Excel

A B

Objetivos de aprendizagem

Neste apêndice, você aprenderá sobre:

- Conceitos básicos
- Funções financeiras
- Aplicações de matemática financeira

Introdução

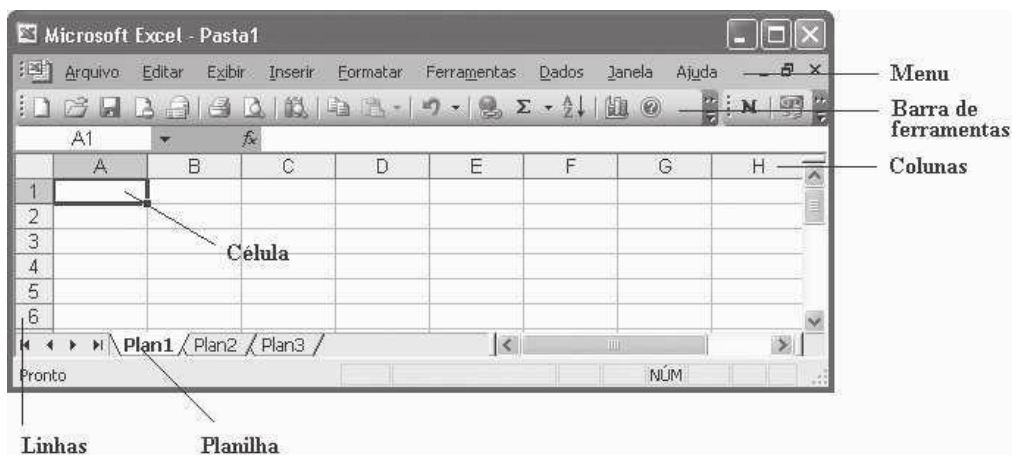
Com a informática, ganhamos uma série de ferramentas de trabalho que ajudam as pessoas a desempenhar suas tarefas de maneira prática e organizada. Assim, o mínimo de conhecimento sobre essas ferramentas passa a ser um diferencial competitivo não só no mercado de trabalho, mas também no ambiente acadêmico ou até mesmo no pessoal. Como exemplo desse tipo de ferramenta, podemos citar o Excel da Microsoft.

O Microsoft Excel é um software editor de planilha eletrônica da família Office da Microsoft. Ferramenta bastante conhecida, o Excel, como simplesmente é chamado, disponibiliza uma série de recursos que vão desde uma simples soma até funções mais complexas. Com os recursos do Excel, podemos criar desde uma simples listagem de nomes até gerenciar pequenos projetos. Infelizmente, a maioria das pessoas que utilizam essa ferramenta ainda desconhece a quantidade de recursos que ela pode oferecer. Utilizado em diversas tarefas, o Excel permite o gerenciamento e a integração de grande volume de dados; também permite que sejam construídos diversos tipos de modelos de gráficos, que facilitam a visualização dos resultados, além de complementar e enriquecer os relatórios gerenciais.

Agora, vamos utilizar o Microsoft Excel para resolver problemas de matemática financeira. Começaremos com operadores da matemática elementar e como trabalhar com essa ferramenta de planilha eletrônica. Depois, apresentaremos as funções de matemática financeira que o Microsoft Excel disponibiliza e, por último, será mostrada uma série de exemplos de aplicações de matemática financeira utilizando o Microsoft Excel.

Conceitos básicos

O processo de aprendizagem do Excel é rápido e simples. Baseado na filosofia do sistema operacional Windows da Microsoft, no Excel trabalhamos dentro de uma janela. No topo dessa janela encontramos o menu de funcionalidades; abaixo, uma barra de ferramentas que pode ser customizada e, na parte central, a área de trabalho composta por planilhas. A planilha é uma estrutura matricial formada por linhas e colunas. As linhas estão na posição horizontal e são identificadas por números ordenados sequencialmente (1, 2, 3, 4...) do lado esquerdo da planilha. Já as colunas encontram-se na posição vertical e são identificadas por letras em ordem alfabética (A, B, C...) na parte superior da planilha. Como no plano cartesiano, no qual as coordenadas X e Y formam um ponto, a intersecção de uma linha com uma coluna forma uma célula no Excel.



Quando estamos posicionados em uma célula, seu contorno fica em destaque e sua identificação é apresentada no canto superior esquerdo (caixa de nome), por exemplo, C2. Essa junção de uma letra e um número significa que estamos na coluna C, terceira coluna e na linha 2, segunda linha da planilha.

É na célula onde depositamos os dados, ou seja, a informação, ou visualizamos o resultado de uma fórmula. Quando desejamos que uma célula tenha o comportamento de uma fórmula, devemos acrescentar o sinal de igual (=) no início do seu valor. Assim, a célula passa a receber as variáveis e constantes que, juntamente com os operadores matemáticos ou funções, formarão a fórmula e o resultado será exibido. Por exemplo: na célula A3 digitamos = A1 + A2; isso significa que A3 será sempre igual à soma dos conteúdos das células A1 e A2.

Operadores utilizados pelo Excel para a elaboração das fórmulas

Operador	Descrição
+	Adição
-	Subtração
*	Multiplificação
/	Divisão
^	Exponenciação

O Excel prioriza a sequência de operações observando a hierarquia das operações matemáticas. Executa primeiro a radiciação e a exponenciação, depois a divisão e a multiplicação e, por fim, a subtração e a adição. O Excel prioriza as operações isoladas por parênteses, de dentro para fora; os colchetes e as chaves não são utilizados.

Detalhes da ferramenta

Vamos conhecer agora mais detalhadamente algumas partes da tela principal do Microsoft Excel.


Na parte superior da tela, encontramos:





(Menu de controle) Menu de controle — Um menu com opções para a manipulação apenas da janela do Excel. Ao dar um clique no ícone do menu de controle, abre-se uma lista com vários controles de ajuste, como: Restaurar, Mover, Tamanho, Minimizar, Maximizar e Fechar.




(Barra de título) Barra de título — Tem a função principal de exibir o nome do software aberto e o arquivo atualmente em uso. A barra de título também apresenta os botões Menu de controle, Minimizar, Restaurar/Maximizar e Fechar.

 **(Minimizar)** Botão Minimizar — Reduz ou minimiza um programa ou uma janela a um botão da barra de tarefas do Windows. Para restaurar, dê um clique no botão referente ao programa ou à janela localizado nessa mesma barra de tarefas.

 **(Maximizar)** Botão Maximizar — Aumenta ou maximiza um programa ou uma janela. Este botão permite melhor visualização dos dados pelo fato de preencher toda a tela do monitor.

 **(Restaurar)** Botão Restaurar abaixo — Restaura um programa ou uma janela ao seu tamanho ou posição anterior.

 **(Fechar)** Botão Fechar — Fecha um programa ou uma janela ativa. Se um arquivo aberto contiver alterações que não foram salvas, você será solicitado a salvar ou não o arquivo antes de fechá-lo.

Ainda na parte superior da tela, observe as barras que encontramos no Excel:



(Barra de menu) Barra de menu — Nessa barra, podemos encontrar todas as opções de menus disponíveis na versão do produto. É por meio desses menus que temos acesso, por exemplo, à tarefa de salvar uma planilha criada. Podemos selecionar uma das opções de menu dando um clique sobre a opção desejada ou pressionando simultaneamente a tecla ALT mais a letra que aparece sublinhada. Por exemplo, para selecionar a opção Arquivo da barra de menu, podemos dar um clique sobre a palavra Arquivo ou pressionar simultaneamente as teclas ALT + A.



(Barra de ferramentas Padrão) Barra de ferramentas Padrão — Nessa barra, encontramos os botões que fornecem fácil acesso às tarefas mais comuns no Excel. Criar, abrir, copiar, colar, imprimir, visualizar ou mesmo salvar uma pasta de trabalho são algumas das opções dessa barra de ferramentas.



(Barra de ferramentas Formatação) Barra de ferramentas Formatação — Nessa barra, encontramos as opções para melhorar a aparência, ou seja, a formatação da sua planilha. Na barra de ferramentas Formatação, podemos mudar o tipo de letra, o tamanho, seu estilo (negrito, itálico ou sublinhado), o alinhamento (esquerda, direita ou centralizado), entre outras opções.



(Barra de fórmulas) Barra de fórmulas — Nessa barra, visualizamos e editamos os valores numéricos, textos ou fórmulas da célula atualmente posicionada.

Na parte inferior da tela do Excel, temos:

(Barra de status) Barra de status — Nessa barra, visualizamos o modo, ou seja, o status da planilha atualmente em uso. Letras maiúsculas (Caps lock acesso), teclado numérico acionado e modo de inserção desativado são situações que você pode ver na barra de status.

Funções financeiras

Na tabela a seguir estão listadas as principais funções financeiras do Excel. Para trabalhar com essas funções, precisamos conhecer algumas convenções adotadas pelo Excel:

- **NPER:** Período de capitalização pode ser anos, semestres, trimestres, meses ou dias.
- **TAXA:** Taxa de juros por período de capitalização.
- **PGTO:** Valor de prestação da série uniforme equivalente ao PMT.
- **TIPO:** Indica a convenção adotada; para postecipada argumento igual a zero (Tipo=0), antecipada argumento igual a um (Tipo=1).
- **PER:** Período cujos juros se deseja saber e que deve estar no intervalo entre 1 e NPER.
- **VP:** Valor presente.
- **VF:** Valor futuro.

Funções financeiras do Excel

Função	Argumento	Descrição
BD	(custo;recuperação;vida_útil; período;mês)	Retorna a depreciação de um ativo para determinado período utilizando o método de balanço de declínio fixo.
BDD	(custo;recuperação;vida_útil; período;fator)	Retorna a depreciação de um ativo para determinado período utilizando o método do balanço de declínio duplo ou qualquer outro método especificado.
BDV	(custo;recuperação;vida_útil; início_período;final_período;...)	Retorna a depreciação de um ativo para um período específico, incluindo o período parcial, utilizando o método de balanço decrescente duplo ou qualquer outro método específico.
DPD	(custo;recuperação;vida_útil)	Retorna a depreciação em linha reta de um ativo durante um período.
ÉPGTO	(taxa;período;nper;vp)	Retorna os juros pagos durante um período específico do investimento.
IPGTO	(taxa, período;nper;vp;vf;tipo)	Retorna o pagamento dos juros de um investimento durante determinado período, com base nos pagamentos constantes, periódicos e na taxa de juros constantes.
MTIR	(valores;taxa_financ;taxa_reinvest)	Retorna a taxa interna de retorno para uma série de fluxos de caixa periódicos, considerando o custo de investimento e os juros de reinvestimento de caixa.
NPER	(taxa;pagto;vp;vf;tipo)	Retorna o número de períodos de um investimento com base em pagamentos constantes periódicos e uma taxa de juros constantes.
PGTO	(taxa;nper;vp;vf;tipo)	Calcula o pagamento de um empréstimo com base em pagamentos e em uma taxa de juros constantes.
PPGTO	(taxa;per;nper;vp;tipo)	Retorna o pagamento sobre o montante de um investimento com base em pagamentos e em uma taxa de juros constantes, periódicos.
DAS	(custo;recuperação;vida_útil;per)	Retorna a depreciação dos dígitos da soma dos anos de um ativo para um período especificado.
TAXA	(nper;pgto;vp;vf;tipo;estimativa)	Retorna a taxa de juros por período em um empréstimo ou investimento. Por exemplo, use 6%/4 para pagamentos trimestrais a uma taxa de 6% TPA.
TIR	(valores;estimativa)	Retorna a taxa interna de retorno de uma série de fluxos de caixa.
VF	(taxa;nper;pgto;vp;tipo)	Retorna o valor futuro de um investimento com base em pagamentos constantes e periódicos e uma taxa de juros constante.
VP	(taxa;nper;pgto;vf;tipo)	Retorna o valor presente de um investimento: a quantia total atual de uma série de pagamentos futuros.
VPL	(taxa;valor1;valor2;...)	Retorna o valor líquido atual de um investimento, com base em uma taxa de desconto e uma série de pagamentos futuros (valores negativos) e renda (positivos).

Aplicações de matemática financeira

A seguir, será demonstrada a resolução de alguns exemplos de matemática financeira com o uso do Excel. Acima de cada exemplo está em destaque o assunto abordado no livro.

Juros simples

Exemplo 1

Um empréstimo de \$100 pode ser contratado à taxa de juros de 10% a.m. (ao mês). Qual é o montante da operação no final do primeiro mês?

	A	B	C
1	Terminologia	Dados	Descrição
2	VP	\$ 100,00	Valor Presente (investimento)
3	n	1	Tempo (meses)
4	i	0,10	Taxa
5	VF	\$ 110,00	Valor Futuro (objetivo)

Figura A.1 Calculando o valor futuro utilizando juros simples.

Procedimentos


- Coluna A e linhas 2, 3, 4 e 5 — terminologia utilizada.
- Coluna B — entrada de dados, isto é, o valor de cada terminologia que será utilizada como argumentos para a fórmula.
- Coluna C — uma breve descrição de cada terminologia.
- Na célula B5, foi aplicada a fórmula da tabela a seguir, que representa a fórmula:

$$S = P(1 + i \times n)$$

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	B5	= B2*(1 + B3*B4)	Retorna o valor futuro do empréstimo

Observação

Para obtermos o alinhamento do símbolo \$ à esquerda e do valor à direita, a opção Contábil deve ser escolhida, em vez de Moeda. Para acessá-la, selecione *Menu-Formatar-Células*. Na janela *Formatar células* escolha a opção Contábil na aba Número. Uma vez definida a formatação para valores, os dados seguintes poderão ser formatados clicando no ícone *moeda* na barra de ferramentas .

Exemplo 2

Uma empresa liquidou, com atraso, as três duplicatas discriminadas a seguir. A taxa de juros de mora cobrada pelo banco foi de 6% a.m. Calcule o montante de liquidação das duplicatas.

	A	B	C	D	E
1	Nº	Valor da duplicata	Data Vencimento	Data Pagamento	Valor Devido
2	1	\$ 939,00	16/10/2005	29/10/2005	\$ 963,41
3	2	\$ 630,00	18/10/2005	29/10/2005	\$ 643,86
4	3	\$ 89,00	25/10/2005	29/10/2005	\$ 89,71
5					
6					
7	COMISSÃO DE PERMANÊNCIA			6%	a.m.

Figura A.2 Aplicando juros simples nas duplicatas.

Procedimentos

- A primeira linha das colunas A, B, C, D e E representa a descrição de cada item das duplicatas.
- As demais linhas 2, 3 e 4 são os dados digitados de cada duplicata em suas respectivas colunas, exceto na coluna E.
- Na célula E2, foi inserida a fórmula para o cálculo do valor devido.
- A mesma fórmula aplicada na célula E2 foi copiada para as células E3 e E4.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	E2	$=B2*(1+\$D\$7*(D2-C2)/30)$	Valor devido de cada duplicata

Observações

- O processo de copiar a fórmula de uma célula para outra é bem simples: basta selecionar a célula que contém a fórmula desejada, clicar com o botão direito do mouse e selecionar a opção *Copiar* do menu apresentado. Posicione na célula que receberá a cópia e clique novamente no botão direito do mouse, só que agora a opção deve ser *Colar*. A célula que recebeu a fórmula passa a exibir o resultado. Existem outros procedimentos para a cópia, entre eles a utilização do *Menu principal*.
- Na célula D7, embora tenha sido digitado o valor 0,06, é apresentado o formato como porcentagem. Esse recurso foi obtido clicando-se o ícone de porcentagem na barra de ferramentas . Portanto, a célula D7 exibe 6%.

Atenção: Observe que a fórmula $=B2*(1+\$D\$7*(D2-C2)/30)$ apresenta o caractere \$ antes da letra D e antes do número 7, o que significa que essa célula, no caso D7, tem uma **referência absoluta**. Ela não varia o seu valor dentro da fórmula mesmo que seja copiada para outra célula. Esse recurso é bastante interessante e será utilizado em outros exemplos.

Juros compostos

► Exemplo 3

Vamos supor que uma empresa contrate um financiamento de capital de giro no valor de \$335.000 por 90 dias, à taxa de 10% a.m. Qual é o montante a ser desembolsado por essa empresa na data de vencimento da operação?

B5		=B2*(1+B4)^B3	
A	B	C	
1	Terminologia	Dados	Descrição
2	VP	\$ 335.000,00	Valor Presente (investimento)
3	n	3	Tempo (anos)
4	i	10%	Taxa
5	VF	\$ 445.885,00	Valor Futuro (objetivo)

Figura A.3 Aplicação de juros compostos.

Procedimentos

- Coluna A e linhas 2, 3, 4 e 5 – terminologia utilizada.
- Coluna B – entrada de dados, isto é, o valor de cada terminologia que será utilizada como argumento para a fórmula.
- Coluna C – uma breve descrição de cada terminologia.
- Na célula B5, foi aplicada a fórmula da tabela a seguir, que representa a fórmula $S = P(1 + i)^n$.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	B5	=B2*(1+B4)^B3	Valor desembolsado aplicado juros compostos

Observações

Na fórmula utilizada nesse exemplo, encontramos o caractere (^), que significa exponenciação. A soma do valor 1 ao conteúdo da célula B4 será elevada ao conteúdo da célula B3, isto é, $(1 + 0,10)^3$, e, por último, multiplicada por \$335.000, que é o conteúdo da célula B2, obedecendo à ordem de prioridade da matemática no Excel.

Como exemplo, podemos observar, nesta planilha, o comportamento dos juros simples e compostos no tempo e ainda visualizar o recurso gráfico do Excel.

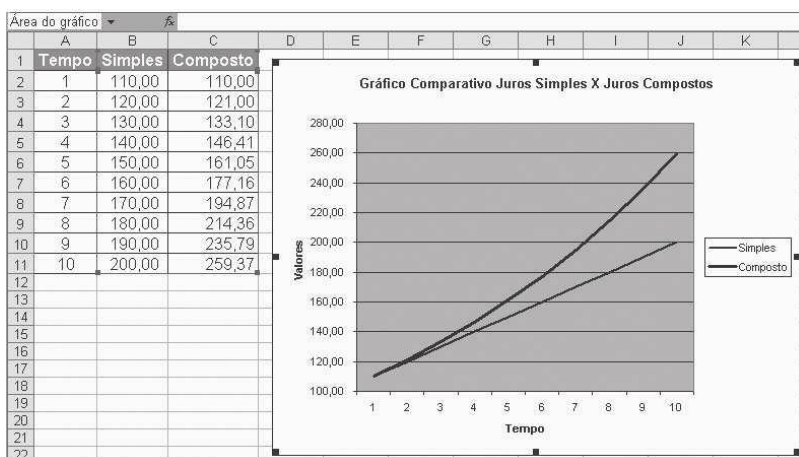


Figura A.4 Comparativo entre juros simples e compostos.

Taxa de juros

► Exemplo 4

A planilha a seguir apresenta os dias corridos, os dias úteis e a taxa *over* de determinadas operações. Calcule a taxa de juros efetiva mensal de cada uma delas.

	A	B	C	D
1	Taxa Over	Número de dias corridos	Número de dias úteis	Taxa Efetiva
2	2,0%	30	22	1,4770%
3	1,8%	35	25	1,2936%
4	2,0%	45	39	1,7479%

Figura A.5 Taxa efetiva.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	D2	$= (1 + A2/30)^{(C2*30/B2)} - 1$	Taxa efetiva a partir da taxa <i>over</i>

Observações

Nesse exemplo, a fórmula da célula D2 foi copiada para as demais linhas da planilha que apresentam a taxa *over*. Na figura seguinte, a mesma fórmula foi utilizada para obter o resultado da célula D2, mas sem o auxílio da ferramenta.

$$i = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du \times n/dc} - 1 = \left(1 + \frac{0,02}{30} \right)^{22 \times 30/30} - 1 = 1,4770\% \text{ a.m.}$$

Figura A.6 Fórmula aplicada para taxa efetiva.

► Exemplo 5

Um investidor aplicou determinada quantia a prazo fixo, a uma taxa de 5,48%. No momento do resgate, ele verificou que a inflação no período da aplicação foi de 1,95%. Determine a taxa de juros real conseguida na aplicação.

	A	B	C
8			Formatado em %
9	Taxa de Juros Aparente	0,0548	5,48%
10	Taxa de Inflação	0,0195	1,95%
11	Taxa de Juros Real	0,034624816	3,46%

Figura A.7 Taxas equivalentes.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	C11	$=((1+C9)/(1+C10)-1)$	Obtemos a taxa de juros real

Observação

Podemos observar dois tipos de formato de apresentação do resultado — de porcentagem ou não — que se encontram disponíveis no Excel.

Desconto

Exemplo 6

Uma empresa descontou três duplicatas no valor de \$8.100, \$9.557 e \$7.000, a vencer, respectivamente, em 21, 42 e 63 dias. A taxa de desconto informada pelo banco foi de 4% a.m. Qual foi o valor líquido obtido na operação? Qual foi a taxa efetiva mensal de juros em cada uma das duplicatas?

G2		=TAXA(C2/30,0;-F2;B2;0)					
	A	B	C	D	E	F	G
	Nº	Valor Duplicata	Prazo (dias)	Taxa Desconto	Valor Desconto	Valor Líquido	Taxa Efetiva Mensal de Juros
2	1	\$8.100,00	21	4%	\$226,80	\$7.873,20	4,14%
3	2	\$9.557,00	42	4%	\$535,19	\$9.021,81	4,20%
4	3	\$7.000,00	63	4%	\$588,00	\$6.412,00	4,27%

Figura A.8 Desconto de duplicatas.

Procedimentos

- As colunas A, B, C e D e as linhas 2, 3 e 4 foram utilizadas como entrada de dados da planilha.
- As colunas D, E e F foram usadas como resultados das fórmulas apresentadas na tabela a seguir.
- Nas colunas D e E, foi inserida a fórmula por meio da digitação. Já na coluna E foi utilizado o *Assistente de função*:
- Utilização do *Assistente de função*:
 - Podemos acessar o *Assistente de função* de duas maneiras. A primeira é acessando o *Menu-Inserir-Função*, a outra é por meio do ícone *Inserir função* da barra de fórmulas.

2. Ao acessar esse recurso, será exibida a seguinte janela:

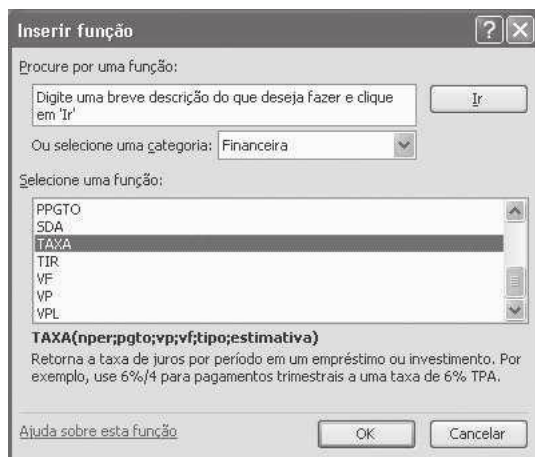


Figura A.9 Janela Inserir função.

3. Nessa janela, é apresentada uma área de texto para pesquisa das funções disponíveis no Excel; mais abaixo, uma lista das categorias das funções e, no centro, são listadas as funções conforme o critério selecionado na lista.
4. Selecione a opção categoria *Financeira*.
5. Agora, selecione a função *TAXA* na lista de funções e clique no botão *OK*. Em seguida, será apresentada a seguinte janela de *Argumentos da função*:

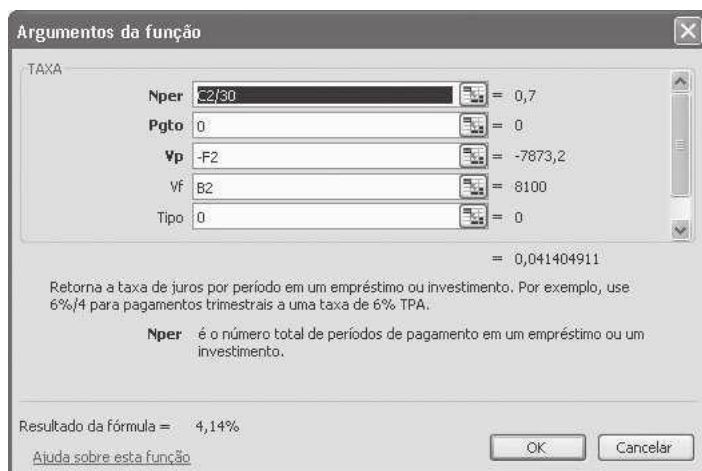


Figura A.10 Janela Argumentos da função.

6. Note que os argumentos solicitados são preenchidos com os dados da planilha. Observe que o argumento *Vp* foi inserido com sinal negativo, pois o Excel opera respeitando a convenção do fluxo de caixa.

7. Para finalizar, digite *OK*.

Fórmulas aplicadas na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	G2	=TAXA(C2/30;0;-F2;B2;0)	Função do Excel que retorna taxas
2	E2	=B2*D2*(C2/30)	Fórmula para obter o valor do desconto
3	F2	=B2-E2	Valor líquido

Observação

O *Assistente de função* não só oferece recursos de funções financeiras, como também aborda outras categorias, como de matemática, trigonometria, estatística etc. Esse assistente será bastante utilizado nos próximos exemplos.

Séries periódicas uniformes

Exemplo 7

Determine o valor de um financiamento a ser quitado por meio de quatro pagamentos mensais de \$5.000, vencendo a primeira parcela a 30 dias da liberação dos recursos, sendo de 5,5% a.m. a taxa contratual de juros.

B5		=VP(B4;B3;-B2;0;0)	
	A	B	C
1	Terminologia	Dados	Descrição
2	PMT	\$ 5.000,00	Valor da parcela
3	n	4	Número de prestações
4	i	5,50%	Taxa
5	VP	\$ 17.525,75	Valor do empréstimo

Figura A.11 Valor presente do financiamento.

Procedimentos

- O conteúdo das células B2, B3 e B4 são os valores dos argumentos da função VP().
- A célula B5 recebe a fórmula da tabela a seguir, utilizando o *Assistente de função*.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	B5	=VP(B4;B3;-B2;0;0)	Valor presente

Observações

- Os valores que não são necessários nos *Argumentos da função* são informados com valor igual a 0, por exemplo, o valor do argumento *Vf*.
- O último argumento, *Tipo*, é informado com valor 0, indicando que se trata da série de pagamentos postecipada.

▶ **Exemplo 8**

Com base no exercício anterior, demonstre, empregando o Excel, o procedimento caso deseje obter o valor das parcelas.

B5		=PGTO(B4;B3;-B2;0;0)	
A	B	C	
1	Terminologia	Dados	Descrição
2	VP	\$ 17.525,75	Valor do empréstimo
3	n	4	Número de prestações
4	i	5,50%	Taxa
5	PMT	\$ 5.000,00	Valor da Parcela

Figura A.12 Valor das parcelas série de pagamentos postecipada.

Procedimentos

- As células B2, B3 e B4 são os argumentos da função PGTO().
- A célula B5 recebe a fórmula da tabela a seguir, utilizando o *Assistente de função*.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	B5	=PGTO(B4;B3;-B2;0;0)	Valor das parcelas

▶ **Exemplo 9**

Um bem cujo preço à vista é de \$3.200 será pago em oito prestações mensais iguais que vencem ao final de cada mês. Considerando que o juro composto cobrado é de 5% a.m., calcular o valor das prestações.

B5		=PGTO(B4;B3;-B2;0;1)	
A	B	C	
1	Terminologia	Dados	Descrição
2	VP	\$3.200,00	Valor do empréstimo
3	n	8	Número de prestações
4	i	5,00%	Taxa
5	PMT	\$ 471,53	Valor da Parcela

Figura A.13 Valor das parcelas série de pagamentos antecipada.

Procedimentos

Os procedimentos são os mesmos do Exemplo 8.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	B5	=PGTO(B4;B3;-B2;0;1)	Valor das parcelas

Observação

Repare que o último argumento, *Tipo*, é informado com valor 1. Isso significa que se trata de série de pagamentos antecipada.

Exemplo 10

Quanto uma pessoa acumularia no fim de 15 meses se depositasse a cada final de mês \$350 em determinada aplicação que paga juros efetivos de 5% ao mês?

	A	B	C
1	Terminologia	Dados	Descrição
2	PMT	\$ 350,00	Valor da Parcela
3	n	15	Número de prestações
4	i	5,00%	Taxa
5	VF	\$ 7.552,50	Valor do empréstimo

Figura A.14 Calculando o valor futuro.

Procedimentos

- As células B2, B3 e B4 são os argumentos da função VF().
- A célula B5 recebe a fórmula da tabela a seguir, utilizando o *Assistente de função*.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	B5	=VF(B4;B3;-B2;0;0)	Calcula o valor futuro da aplicação

Perpetuidades

Exemplo 11

Sendo o valor de mercado do aluguel de certo apartamento em torno de \$1.200, determinar o valor estimado para a compra desse imóvel para investimento, taxa de 1% ao mês. Considerar o aluguel como uma receita potencial permanente.

	A	B	C
1	Terminologia	Dados	Descrição
2	R	\$ 1.200,00	Renda mensal
3	i	1,00%	Taxa
4	P	\$ 120.000,00	Valor estimado

Figura A.15 Perpetuidade.

Procedimentos

- Coluna A e as linhas 2, 3 e 4 — terminologia utilizada.
- Coluna B2 e B3 — entrada de dados para a fórmula digitada em B4.
- Coluna C — descrição.

Fórmula aplicada na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	B4	=B2/B3	Retorna a perpetuidade

Capitalização contínua

► Exemplo 12

Calcular a taxa efetiva ao ano equivalente a uma taxa contínua de 90% a.a.
Calcular a taxa contínua equivalente a uma taxa efetiva de 80% a.a.

	A	B	C	D	E	F	G
3	Terminologia	Dados	Descrição				
4	δ	90,00%	Taxa contínua				
5	i	145,96%	Taxa efetiva ao ano				
6							
7	Terminologia	Dados	Descrição				
8	i	80,00%	Taxa efetiva ao ano				
9	δ	58,78%	Taxa contínua				
10							

Figura A.16 Taxa efetiva e contínua.

Procedimentos

- As células B4 e B8 foram utilizadas como entrada de dados.
- As células B5 e B9 receberam as fórmulas da tabela a seguir, utilizando o *Assistente de função*. Selecionar a categoria *Matemática e trigonométrica* no lugar da financeira para obter as duas funções.
- As colunas A e C foram utilizadas como terminologia e descrição, respectivamente.

Fórmulas aplicadas na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	B5	=EXP(B4)-1	Retorna 'e' elevado à potência de determinado número
2	B9	=LN(1+B8)	Retorna o logaritmo natural de um número

Observações

Aproveitando o assunto capitalização contínua, introduzimos duas funções que não fazem parte do conjunto de funções da categoria financeira do Excel: as funções EXP() e LN(), que fazem parte da categoria de funções de matemática e trigonométrica. A função EXP() representa a base dos *logaritmos neperianos* ($e = 2,718281\dots$) elevada à potência de determinado número; a função LN() representa o logaritmo natural e também é conhecida como *logaritmo neperiano*.

Sistemas de amortização

► Exemplo 13

Demonstre os esquemas de pagamento de um empréstimo de \$10.000, à taxa de 5% a.m., para o prazo de quatro meses, para os sistemas de amortização Price e SAC.

Price

D15		=SOMA(D10:D13)			
A	B	C	D	E	
1	Sistema Francês de Amortização		Tabela PRICE		
2					
3	Terminologia	Dados	Descrição		
4	VP	\$ 10.000,00	Valor Financiado		
5	n	4	Número de prestações		
6	i	5,00%	Taxa Mensal de Juros		
7					
8	Mês	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
9	0	\$10.000,00			
10	1	\$7.679,88	\$2.320,12	\$500,00	\$2.820,12
11	2	\$5.243,76	\$2.436,12	\$383,99	\$2.820,12
12	3	\$2.685,83	\$2.557,93	\$262,19	\$2.820,12
13	4	\$0,00	\$2.685,83	\$134,29	\$2.820,12
14					
15			Total de Juros	\$1.280,47	

Figura A.17 Sistema de Amortização Francês Tabela Price.

Procedimentos

- Coluna A e linhas 4, 5 e 6 — terminologia utilizada.
- Coluna B — entrada de dados, isto é, o valor de cada terminologia que será utilizada como argumento para as fórmulas.
- Coluna C — uma breve descrição de cada terminologia.
- A linha 8 e as colunas A, B, C, D e E representam a descrição de cada item necessário para a construção da Tabela Price.
- A linha 9 representa a entrada do fluxo.
- As demais linhas são os números de meses, e cada coluna exibe o resultado da fórmula atribuído a sua descrição. Exemplo: a linha 10, coluna E, mostra a primeira prestação gerada pela fórmula **PGTO(\$B\$6;\$B\$5;-\$B\$4;0;0)** que recebe os argumentos a seguir utilizando o *Assistente de função* do Excel:
 - taxa : coluna B linha 6 = 5%
 - nper : coluna B linha 5 = 4
 - vp : coluna B linha 4 = 10.000
 - vf : 0 = argumento não utilizado
 - tipo : 0 = postecipada

Fórmulas aplicadas na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	E10	=PGTO(\$B\$6;\$B\$5;-\$B\$4;0;0)	Prestação
2	C10	=PPGTO(\$B\$6;A10;\$B\$5;-\$B\$4)	Amortização
3	D10	=IPGTO(\$B\$6;A10;\$B\$5;-\$B\$4;0)	Juros
4	B10	=B9-C10	Saldo devedor
5	D15	=SOMA(D10:D13)	Somatória dos juros

Observações

1. Na planilha, as fórmulas aplicadas na linha 10 e nas colunas B, C, D e E são copiadas para as linhas 11, 12, 13 e 14, mantendo as mesmas colunas.
2. Cada uma dessas fórmulas pode ser incluída via digitação ou utilizando o botão *Inserir função*, como já demonstrado nos exemplos anteriores.
3. Todas as fórmulas utilizadas e seus respectivos argumentos foram apresentados no tópico *Funções financeiras*.
4. A célula D15 recebe a função SOMA(). Essa função soma o conteúdo das células da faixa do argumento inicial até o argumento final — no exemplo, da célula D10 até a D13. A função SOMA() também pode ser inserida pelo ícone *AutoSoma*.

SAC

D15		=SOMA(D10:D13)				
	A	B	C	D	E	
1	Sistema de Amortizações Constantes		SAC			
2						
3	Terminologia	Dados	Descrição			
4	VP	\$ 10.000,00	Valor Financiado			
5	n	4	Número de prestações			
6	i	5,00%	Taxa Mensal de Juros			
7						
8	Mês	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação	
9	0	\$10.000,00				
10	1	\$7.500,00	\$2.500,00	\$500,00	\$3.000,00	
11	2	\$5.000,00	\$2.500,00	\$375,00	\$2.875,00	
12	3	\$2.500,00	\$2.500,00	\$250,00	\$2.750,00	
13	4	\$0,00	\$2.500,00	\$125,00	\$2.625,00	
14						
15			Total de Juros	\$1.250,00		

Figura A.18 Sistema de Amortizações Constantes (SAC).

Procedimentos

- a) Coluna A e linhas 4, 5 e 6 — terminologia utilizada.
- b) Coluna B — entrada de dados, isto é, o valor de cada terminologia que será utilizada como argumento para as fórmulas.
- c) Coluna C — uma breve descrição de cada terminologia.
- d) A linha 8 e as colunas A, B, C, D e E representam a descrição de cada item necessário para a construção do SAC.
- e) A linha 9 representa a entrada do fluxo.

f) As demais linhas são os números de meses, e cada coluna exhibe o resultado da fórmula digitada pelo usuário.

Fórmulas aplicadas na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	C10	=B\$4/\$B\$5	Amortização
2	B10	=(B9-C10)	Saldo devedor
3	D10	=B9*\$B\$6	Juros
4	E10	=(C10+D10)	Prestação
5	D15	=SOMA(D10:D13)	Somatório dos juros

Observações

1. Na planilha, as fórmulas aplicadas na linha 10 e nas colunas B, C, D e E são copiadas para as linhas 11, 12, 13 e 14, mantendo as mesmas colunas.
2. Com exceção da fórmula da célula D15, as demais foram geradas pela digitação da fórmula.
3. Atenção para o detalhe da fórmula **B\$4/\$B\$5**, como apresentado no Exemplo 2. Trata-se de **referências absolutas**, por apresentarem o caractere \$ antes da letra e do número.

Avaliação de investimentos de capital

Exemplo 14

Uma empresa está avaliando dois projetos de investimento, cujos fluxos de caixa são apresentados na planilha do Excel a seguir. Considerando que o custo financeiro da empresa é de 15% a.a. e que os projetos são mutuamente excludentes, qual deles deve ser aprovado pelo diretor executivo?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2					Taxa de Juros	15%			
3									
4									
5	Ano	Projeto A Fluxo de Caixa	$\frac{FC_t}{(1+K)^t}$	VP	Projeto B Fluxo de Caixa	$\frac{FC_t}{(1+K)^t}$	VP		
6	0	\$ (500.000,00)			\$ (500.000,00)				
7	1	\$ 50.000,00	\$ 43.478,26	\$ 43.478,26	\$ 140.000,00	\$ 121.739,13	\$ 121.739,13		
8	2	\$ 60.000,00	\$ 45.368,62	\$ 88.846,88	\$ 130.000,00	\$ 98.298,68	\$ 220.037,81		
9	3	\$ 70.000,00	\$ 46.026,14	\$ 134.873,02	\$ 120.000,00	\$ 78.901,95	\$ 298.939,76		
10	4	\$ 80.000,00	\$ 45.740,26	\$ 180.613,28	\$ 110.000,00	\$ 62.892,86	\$ 361.832,61		
11	5	\$ 90.000,00	\$ 44.745,91	\$ 225.359,18	\$ 100.000,00	\$ 49.717,67	\$ 411.550,29		
12	6	\$ 100.000,00	\$ 43.232,76	\$ 268.591,94	\$ 90.000,00	\$ 38.909,48	\$ 450.459,77		
13	7	\$ 110.000,00	\$ 41.353,07	\$ 309.945,02	\$ 80.000,00	\$ 30.074,96	\$ 480.534,73		
14	8	\$ 120.000,00	\$ 39.228,21	\$ 349.173,23	\$ 70.000,00	\$ 22.883,12	\$ 503.417,86	<=	Pay-Back
15	9	\$ 130.000,00	\$ 36.954,11	\$ 386.127,34	\$ 60.000,00	\$ 17.056,74	\$ 520.473,60		
16	10	\$ 140.000,00	\$ 34.605,86	\$ 420.733,20	\$ 50.000,00	\$ 12.359,24	\$ 532.832,84		
17									
18	VPL	\$ (79.266,80)			\$ 32.832,84				
19									
20	TIR	11%			17%				
21									

Figura A.19 Avaliação de projetos.

Procedimentos

- a) A célula F2 representa a taxa anual aplicada para ambos os projetos.
- b) A linha 5 apresenta a descrição de cada coluna para análise dos projetos.
- c) A faixa de valores da célula A6 até A16 representa o período dos projetos.
- d) As colunas B e E são as entradas e as saídas do fluxo de caixa dos projetos A e B no período que vai da linha 6 até 16.
- e) Nas colunas C e F, são aplicadas as fórmulas especificadas nas células C5 e F5 para obtermos o VP no seu respectivo período.
- f) Nas colunas D e G, é incluída a fórmula para totalizar a soma do VP com o período anterior até o último período do fluxo de caixa dos projetos.
- g) Nas células B18 e E18, calculamos o VPL utilizando o *Assistente de função* do Excel, selecionando a função VPL() e preenchendo seus argumentos.
- h) Em B20 e E20, calculamos a TIR, inserindo a função TIR() disponibilizada no *Assistente de função*. Em seguida, preenchemos seus argumentos.
- i) Na linha 14 destacamos o *pay-back* do projeto B.

Fórmulas aplicadas na planilha

Nº	Célula	Fórmula	Descrição
1	C7	=B7/((1+\$F\$2)^A7)	Fórmula para VPs projeto A
2	D7	=(D6+C7)	Soma dos VPs projeto A
3	F7	=E7/((1+\$F\$2)^A7)	Fórmula para VPs projeto B
4	G7	=(G6+F7)	Soma dos VPs projeto B
5	B18	=B6+VPL(\$F\$2;B7;B8;B9;B10;B11;B12;B13;B14;B15;B16)	VPL do projeto A
6	E18	=E6+VPL(\$F\$2;E7;E8;E9;E10;E11;E12;E13;E14;E15;E16)	VPL do projeto B
7	B20	=TIR(B6:B16)	TIR do projeto A
8	E20	=TIR(E6:E16)	TIR do projeto B

Observações

1. Nesse exemplo, apresentamos três variáveis importantes na análise de investimentos: VPL, TIR e *pay-back*. Para o VPL e a TIR, utilizamos as funções disponíveis do Excel; já para o *pay-back*, incluímos, para o projeto A, as colunas C e D e, para o projeto B, as colunas F e G e suas respectivas fórmulas.
2. No nosso exemplo, o projeto B é aquele que apresenta o melhor resultado em todas as variáveis analisadas.

APÊNDICE

Tabelas financeiras

A B

FATOR DE VALOR FUTURO PARA PAGAMENTO ÚNICO: $(1 + i)^n$										
n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000	1,08000	1,09000	1,10000
2	1,02010	1,04040	1,06090	1,08160	1,10250	1,12360	1,14490	1,16640	1,18810	1,21000
3	1,03030	1,06121	1,09273	1,12486	1,15763	1,19102	1,22504	1,25971	1,29503	1,33100
4	1,04060	1,08243	1,12551	1,16986	1,21551	1,26248	1,31080	1,36049	1,41158	1,46410
5	1,05101	1,10408	1,15927	1,21665	1,27628	1,33823	1,40255	1,46933	1,53862	1,61051
6	1,06152	1,12616	1,19405	1,26532	1,34010	1,41852	1,50073	1,58687	1,67710	1,77156
7	1,07214	1,14869	1,22987	1,31593	1,40710	1,50363	1,60578	1,71382	1,82804	1,94872
8	1,08286	1,17166	1,26677	1,36857	1,47746	1,59385	1,71819	1,85093	1,99256	2,14359
9	1,09369	1,19509	1,30477	1,42331	1,55133	1,68948	1,83846	1,99900	2,17189	2,35795
10	1,10462	1,21899	1,34392	1,48024	1,62889	1,79085	1,96715	2,15892	2,36736	2,59374
11	1,11567	1,24337	1,38423	1,53945	1,71034	1,89830	2,10485	2,33164	2,58043	2,85312
12	1,12683	1,26824	1,42576	1,60103	1,79586	2,01220	2,25219	2,51817	2,81266	3,13843
13	1,13809	1,29361	1,46853	1,66507	1,88565	2,13293	2,40985	2,71962	3,06580	3,45227
14	1,14947	1,31948	1,51259	1,73168	1,97993	2,26090	2,57853	2,93719	3,34173	3,79750
15	1,16097	1,34587	1,55797	1,80094	2,07893	2,39656	2,75903	3,17217	3,64248	4,17725
16	1,17258	1,37279	1,60471	1,87298	2,18287	2,54035	2,95216	3,42594	3,97031	4,59497
17	1,18430	1,40024	1,65285	1,94790	2,29202	2,69277	3,15882	3,70002	4,32763	5,05447
18	1,19615	1,42825	1,70243	2,02582	2,40662	2,85434	3,37993	3,99602	4,71712	5,55992
19	1,20811	1,45681	1,75351	2,10685	2,52695	3,02560	3,61653	4,31570	5,14166	6,11591
20	1,22019	1,48595	1,80611	2,19112	2,65330	3,20714	3,86968	4,66096	5,60441	6,72750
21	1,23239	1,51567	1,86029	2,27877	2,78596	3,39956	4,14056	5,03383	6,10881	7,40025
22	1,24472	1,54598	1,91610	2,36992	2,92526	3,60354	4,43040	5,43654	6,65860	8,14027
23	1,25716	1,57690	1,97359	2,46472	3,07152	3,81975	4,74053	5,87146	7,25787	8,95430
24	1,26973	1,60844	2,03279	2,56330	3,22510	4,04893	5,07237	6,34118	7,91108	9,84973
25	1,28243	1,64061	2,09378	2,66584	3,38635	4,29187	5,42743	6,84848	8,62308	10,83471
26	1,29526	1,67342	2,15659	2,77247	3,55567	4,54938	5,80735	7,39635	9,39916	11,91818
27	1,30821	1,70689	2,22129	2,88337	3,73346	4,82235	6,21387	7,98806	10,24508	13,10999
28	1,32129	1,74102	2,28793	2,99870	3,92013	5,11169	6,64884	8,62711	11,16714	14,42099
29	1,33450	1,77584	2,35657	3,11865	4,11614	5,41839	7,11426	9,31727	12,17218	15,86309
30	1,34785	1,81136	2,42726	3,24340	4,32194	5,74349	7,61226	10,06266	13,26768	17,44940
31	1,36133	1,84759	2,50008	3,37313	4,53804	6,08810	8,14511	10,86767	14,46177	19,19434
32	1,37494	1,88454	2,57508	3,50806	4,76494	6,45339	8,71527	11,73708	15,76333	21,11378
33	1,38869	1,92223	2,65234	3,64838	5,00319	6,84059	9,32534	12,67605	17,18203	23,22515
34	1,40258	1,96068	2,73191	3,79432	5,25335	7,25103	9,97811	13,69013	18,72841	25,54767
35	1,41660	1,99989	2,81386	3,94609	5,51602	7,68609	10,67658	14,78534	20,41397	28,10244
36	1,43077	2,03989	2,89828	4,10393	5,79182	8,14725	11,42394	15,96817	22,25123	30,91268
37	1,44508	2,08069	2,98523	4,26809	6,08141	8,63609	12,22362	17,24563	24,25384	34,00395
38	1,45953	2,12230	3,07478	4,43881	6,38548	9,15425	13,07927	18,62528	26,43668	37,40434
39	1,47412	2,16474	3,16703	4,61637	6,70475	9,70351	13,99482	20,11530	28,81598	41,14478
40	1,48886	2,20804	3,26204	4,80102	7,03999	10,28572	14,97446	21,72452	31,40942	45,25926

FATOR DE VALOR PRESENTE DE SÉRIES UNIFORMES: $a_{n i\%$										
n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,99010	0,98039	0,97087	0,96154	0,95238	0,94340	0,93458	0,92593	0,91743	0,90909
2	1,97040	1,94156	1,91347	1,88609	1,85941	1,83339	1,80802	1,78326	1,75911	1,73554
3	2,94099	2,88388	2,82861	2,77509	2,72325	2,67301	2,62432	2,57710	2,53129	2,48685
4	3,90197	3,80773	3,71710	3,62990	3,54595	3,46511	3,38721	3,31213	3,23972	3,16987
5	4,85343	4,71346	4,57971	4,45182	4,32948	4,21236	4,10020	3,99271	3,88965	3,79079
6	5,79548	5,60143	5,41719	5,24214	5,07569	4,91732	4,76654	4,62288	4,48592	4,35526
7	6,72819	6,47199	6,23028	6,00205	5,78637	5,58238	5,38929	5,20637	5,03295	4,86842
8	7,65168	7,32548	7,01969	6,73274	6,46321	6,20979	5,97130	5,74664	5,53482	5,33493
9	8,56602	8,16224	7,78611	7,43533	7,10782	6,80169	6,51523	6,24689	5,99525	5,75902
10	9,47130	8,98259	8,53020	8,11090	7,72173	7,36009	7,02358	6,71008	6,41766	6,14457
11	10,36763	9,78685	9,25262	8,76048	8,30641	7,88687	7,49867	7,13896	6,80519	6,49506
12	11,25508	10,57534	9,95400	9,38507	8,86325	8,38384	7,94269	7,53608	7,16073	6,81369
13	12,13374	11,34837	10,63496	9,98565	9,39357	8,85268	8,35765	7,90378	7,48690	7,10336
14	13,00370	12,10625	11,29607	10,56312	9,89864	9,29498	8,74547	8,24424	7,78615	7,36669
15	13,86505	12,84926	11,93794	11,11839	10,37966	9,71225	9,10791	8,55948	8,06069	7,60608
16	14,71787	13,57771	12,56110	11,65230	10,83777	10,10590	9,44665	8,85137	8,31256	7,82371
17	15,56225	14,29187	13,16612	12,16567	11,27407	10,47726	9,76322	9,12164	8,54363	8,02155
18	16,39827	14,99203	13,75351	12,65930	11,68959	10,82760	10,05909	9,37189	8,75563	8,20141
19	17,22601	15,67846	14,32380	13,13394	12,08532	11,15812	10,33560	9,60360	8,95011	8,36492
20	18,04555	16,35143	14,87747	13,59033	12,46221	11,46992	10,59401	9,81815	9,12855	8,51356
21	18,85698	17,01121	15,41502	14,02916	12,82115	11,76408	10,83553	10,01680	9,29224	8,64869
22	19,66038	17,65805	15,93692	14,45112	13,16300	12,04158	11,06124	10,20074	9,44243	8,77154
23	20,45582	18,29220	16,44361	14,85684	13,48857	12,30338	11,27219	10,37106	9,58021	8,88322
24	21,24339	18,91393	16,93554	15,24696	13,79864	12,55036	11,46933	10,52876	9,70661	8,98474
25	22,02316	19,52346	17,41315	15,62208	14,09394	12,78336	11,65358	10,67478	9,82258	9,07704
26	22,79520	20,12104	17,87684	15,98277	14,37519	13,00317	11,82578	10,80998	9,92897	9,16095
27	23,55961	20,70690	18,32703	16,32959	14,64303	13,21053	11,98671	10,93516	10,02658	9,23722
28	24,31644	21,28127	18,76411	16,66306	14,89813	13,40616	12,13711	11,05108	10,11613	9,30657
29	25,06579	21,84438	19,18845	16,98371	15,14107	13,59072	12,27767	11,15841	10,19828	9,36961
30	25,80771	22,39646	19,60044	17,29203	15,37245	13,76483	12,40904	11,25778	10,27365	9,42691
31	26,54229	22,93770	20,00043	17,58849	15,59281	13,92909	12,53181	11,34980	10,34280	9,47901
32	27,26959	23,46833	20,38877	17,87355	15,80268	14,08404	12,64656	11,43500	10,40624	9,52638
33	27,98969	23,98856	20,76579	18,14765	16,00255	14,23023	12,75379	11,51389	10,46444	9,56943
34	28,70267	24,49859	21,13184	18,41120	16,19290	14,36814	12,85401	11,58693	10,51784	9,60857
35	29,40858	24,99862	21,48722	18,66461	16,37419	14,49825	12,94767	11,65457	10,56682	9,64416
36	30,10751	25,48884	21,83225	18,90828	16,54685	14,62099	13,03521	11,71719	10,61176	9,67651
37	30,79951	25,96945	22,16724	19,14258	16,71129	14,73678	13,11702	11,77518	10,65299	9,70592
38	31,48466	26,44064	22,49246	19,36786	16,86789	14,84602	13,19347	11,82887	10,69082	9,73265
39	32,16303	26,90259	22,80822	19,58448	17,01704	14,94907	13,26493	11,87858	10,72552	9,75696
40	32,83469	27,35548	23,11477	19,79277	17,15909	15,04630	13,33171	11,92461	10,75736	9,77905

FATOR DE VALOR FUTURO DE SÉRIES UNIFORMES: $s_{\overline{n} i\%}$										
n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	2,01000	2,02000	2,03000	2,04000	2,05000	2,06000	2,07000	2,08000	2,09000	2,10000
3	3,03010	3,06040	3,09090	3,12160	3,15250	3,18360	3,21490	3,24640	3,27810	3,31000
4	4,06040	4,12161	4,18363	4,24646	4,31013	4,37462	4,43994	4,50611	4,57313	4,64100
5	5,10101	5,20404	5,30914	5,41632	5,52563	5,63709	5,75074	5,86660	5,98471	6,10510
6	6,15202	6,30812	6,46841	6,63298	6,80191	6,97532	7,15329	7,33593	7,52333	7,71561
7	7,21354	7,43428	7,66246	7,89829	8,14201	8,39384	8,65402	8,92280	9,20043	9,48717
8	8,28567	8,58297	8,89234	9,21423	9,54911	9,89747	10,25980	10,63663	11,02847	11,43589
9	9,36853	9,75463	10,15911	10,58280	11,02656	11,49132	11,97799	12,48756	13,02104	13,57948
10	10,46221	10,94972	11,46388	12,00611	12,57789	13,18079	13,81645	14,48656	15,19293	15,93742
11	11,56683	12,16872	12,80780	13,48635	14,20679	14,97164	15,78360	16,64549	17,56029	18,53117
12	12,68250	13,41209	14,19203	15,02581	15,91713	16,86994	17,88845	18,97713	20,14072	21,38428
13	13,80933	14,68033	15,61779	16,62684	17,71298	18,88214	20,14064	21,49530	22,95338	24,52271
14	14,94742	15,97394	17,08632	18,29191	19,59863	21,01507	22,55049	24,21492	26,01919	27,97498
15	16,09690	17,29342	18,59891	20,02359	21,57856	23,27597	25,12902	27,15211	29,36092	31,77248
16	17,25786	18,63929	20,15688	21,82453	23,65749	25,67253	27,88805	30,32428	33,00340	35,94973
17	18,43044	20,01207	21,76159	23,69751	25,84037	28,21288	30,84022	33,75023	36,97370	40,54470
18	19,61475	21,41231	23,41444	25,64541	28,13238	30,90565	33,99903	37,45024	41,30134	45,59917
19	20,81090	22,84056	25,11687	27,67123	30,53900	33,75999	37,37896	41,44626	46,01846	51,15909
20	22,01900	24,29737	26,87037	29,77808	33,06595	36,78559	40,99549	45,16196	51,16012	57,27500
21	23,23919	25,78332	28,67649	31,96920	35,71925	39,99273	44,86518	50,42292	56,76453	64,00250
22	24,47159	27,29898	30,53678	34,24797	38,50521	43,39229	49,00574	55,45676	62,87334	71,40275
23	25,71630	28,84496	32,45288	36,61789	41,43048	46,99583	53,43614	60,89330	69,53194	79,54302
24	26,97346	30,42186	34,42647	39,08260	44,50200	50,81558	58,17667	66,76476	76,78981	88,49733
25	28,24320	32,03030	36,45926	41,64591	47,72710	54,86451	63,24904	73,10594	84,70090	98,34706
26	29,52563	33,67091	38,55304	44,31174	51,11345	59,15638	68,67647	79,95442	93,32398	109,18177
27	30,82089	35,34432	40,70963	47,08421	54,66913	63,70577	74,48382	87,35077	102,72313	121,09994
28	32,12910	37,05121	42,93092	49,96758	58,40258	68,52811	80,69769	95,33883	112,96822	134,20994
29	33,45039	38,79223	45,21885	52,96629	62,32271	73,63980	87,34653	103,96594	124,13536	148,63093
30	34,78489	40,56808	47,57542	56,08494	66,43885	79,05819	94,46079	113,28321	136,30754	164,49402
31	36,13274	42,37944	50,00268	59,32834	70,76079	84,80168	102,07304	123,34587	149,57522	181,94342
32	37,49407	44,22703	52,50276	62,70147	75,29883	90,88978	110,21815	134,21354	164,03699	201,13777
33	38,86901	46,11157	55,07784	66,20953	80,06377	97,34316	118,93343	145,95062	179,80032	222,25154
34	40,25770	48,03380	57,73018	69,85791	85,06696	104,18375	128,25876	158,62667	196,98234	245,47670
35	41,66028	49,99448	60,46208	73,65222	90,32031	111,43478	138,23688	172,31680	215,71075	271,02437
36	43,07688	51,99437	63,27594	77,59831	95,83632	119,12087	148,91346	187,10215	236,12472	299,12681
37	44,50765	54,03425	66,17422	81,70225	101,62814	127,26812	160,33740	203,07032	258,37595	330,03949
38	45,95272	56,11494	69,15945	85,97034	107,70955	135,90421	172,56102	220,31595	282,62978	364,04343
39	47,41225	58,23724	72,23423	90,40915	114,09502	145,05846	185,64029	238,94122	309,06646	401,44778
40	48,88637	60,40198	75,40126	95,02552	120,79977	154,76197	199,63511	259,05652	337,88245	442,59256



Respostas dos exercícios propostos

Capítulo 1

1. 34,61% a.a.
2. \$2.040.
3. \$19.413,33.
4. 52,94% a.a.
5. 9 meses.
6. 13 meses.
7. 22,73% a.m.
8. \$2.231,95.
9. \$108.800; 25% a.a.
10. \$1.000; \$1.500; \$2.000.
11. 0,833% a.m. (10% a.a.).
12. \$10.000.
13. \$320.000 e \$13.333,33.
14. \$50.000 e \$80.000.
15. 7 anos, 4 meses e 27 dias.
16. 3 meses; 15 meses.
17. \$1.000.000.
18. \$133,33 e \$83,33.
19. \$10.000; 30% a.a.
20. \$140.
21. \$350 e \$150.
22. 5% a.a. e 270 dias.
23. \$2.307,50.
24. \$1.548,75.
25. \$2.296,12.
26. 40 meses; 80 meses; 130 dias;
200 dias
27. 30% a.a.; 2,5% a.m.; 60% a.a.
28. \$3.571,43; \$1.758,24; \$2.973,33.
29. \$141,67; \$78.947,37; \$5.270;
\$17.814,73; 4,0229885% a.m.
30. 24 de agosto; \$1.708,67.
31. \$222,67.
32. \$55.
33. \$2.654,50.
34. \$10.120.
35. \$10.119,82.

Capítulo 2

1. \$4.428,62; \$5.554,06; \$4.148,54.
2. 11 meses.
3. \$32.306,54.
4. \$14.149,62; \$51.578,89;
\$35.055,91; \$434,05.
5. 15% a.m.
6. \$11.033,75.
7. 6% a.m.; à vista.
8. \$17,78.
9. 25% a.m.
10. 37,17 anos.
11. 3 anos.
12. 30% a.m.
13. 23,89% a.m.
14. 5,9822% a.m.; à vista.
15. 35,05%.
16. 0%.
17. \$751,37.

18. \$150.480.
19. \$23.106,43.
20. 2% a.m.; 1 mês.
21. \$13.440,52; \$3.440,52.
22. 3,19% a.m.
23. \$500.
24. \$700; 5% a.m.
25. \$200.
26. \$500.
27. 2,5225927% a.m.
28. \$800; 15 meses.
29. \$832,91; \$416,46; 10 meses.
30. 1 ano; 2 anos.
31. \$2.000.
32. \$20.000.
33. \$30.000.
34. 23,61591 meses (aproximadamente 23 meses e 19 dias).
35. 5% a.m.
36. 427 dias.
37. 23,362419 meses.
38. 65 dias.
39. 24,67444448 meses (740 dias).
40. \$150,18.
41. 21,9% a.a.
42. \$875,98.
43. \$49.571,43.
44. \$5.961,83.
45. \$1.855,78.
46. \$102.796,05.
47. 0,9341% a.m.
48. 9 dias.
49. \$2.003,04; \$1.996,96.
50. 13,5184526% a.m.
51. \$392,40.
52. \$82,99.
53. 11,2987% a.m.

Capítulo 3

1. 3,320970% a.m.; 10,297439% a.t.; 21,655251% a.s.
2. 5% a.m.; 15,76% a.t.; 34,01% a.s.
3. 82,12% a.a.; 79,59% a.a.; 74,90% a.a.; 69% a.a.
4. 34,12% a.a.; 35,10% a.a.; 36,64% a.a.
5. 101,90% a.a.
6. 5 meses.
7. a) 21%; b) 309,60%; c) 58,57%; d) 28,95%; e) 2,77%; f) 5,6150%.
8. 54,33%; 24,23%; 195,89%; 1.985,24%.
9. \$14.043,78.
10. \$57.980,04.
11. a) \$2.519,42; b) \$2.859,01; c) \$2.435,94.
12. 8 meses.
13. a) 29,87%; b) 43,24%; c) 1,9796%; d) 10,30%; e) 57,99%; f) 27,35%.
14. As duas são equivalentes.
15. Trimestral.
16. 4 meses.
17. 1,2371% a.m.
18. \$4.308,10.
19. 2 meses.
20. 3,1642% a.m.
21. 6,1678% a.a.
22. Banco A.
23. \$6.355,18; 2 anos.
24. 42 meses.
25. 12 anos.
26. \$23.870,48.
27. 3 anos.
28. \$10.000.
29. 3 anos; \$10.000.
30. \$666.666,56.
31. \$1.184.804,91; \$979.177,61; \$668.791,48.
32. \$60.000,73; \$50.000,73.
33. 4,5226% a.a.
34. Oferta A.

35. \$3.161,79.
 36. 9% a.t.
 37. \$54.370,05.
 38. \$4.000; 2 anos.
 39. 11,6123% a.a.
 40. \$1.138,80.
 41. \$14.037,98.
 42. \$1.900.
 43. \$1.910,50.
 44. \$20.302,47.
 45. 1 ano.
 46. 42.884,87.
 47. 208 dias.
 48. 2 anos.
 49. 16% a.a.
 50. Em 19/09/2008 (após 730 dias).
 51. 12 meses.
 52. \$23.791,66.
 53. \$7,52.
 54. 11,4949% a.a.

Capítulo 4

1. $D = \$72.000$; $V = \$108.000$.
 2. $N = \$34.363,63$; $i = 27,27\%$ a.m.
 3. $V = \$96.000$.
 4. $i = 3,13\%$ a.m.
 5. $i = 2,5\%$ a.m.
 6. $d = 50\%$ a.a.; $i = 60\%$ a.a.
 7. $PU = 0,68966$; $d = 124,14\%$ a.a.
 8. $V = \$447.457,63$.
 9. 2 meses.
 10. $d = 36,92\%$ a.a.; $i = 42,11\%$ a.a.
 11. $V = \$220.994,48$.
 12. a) 53,26% a.a.; b) 38,36% a.a.;
 c) 36,69% a.a.
 13. \$63.000; 34,29% a.a.
 14. $n_1 = 240$ dias; $n_2 = 250$ dias;
 $i_1 = 47,37\%$ a.a.; $i_2 = 48\%$ a.a.
 15. $N_1 = \$100.000$; $N_2 = \$140.000$.
 16. $N_1 = \$206.307,03$; $N_2 = \$221.402,67$.
 17. $N_1 = \$10.000$; $N_2 = \$20.000$.
 18. $d = 2\%$ a.m.; $i = 2,78\%$ a.m.
 19. \$2.000 e \$3.000.
 20. A 1ª possibilidade [$\$500 < (D = \$600)$].
 21. $N_1 = \$4.957,68$; $N_2 = \$5.223,27$.
 22. \$8.333,33; \$16.666,67.
 23. $N_1 = \$50.000$; $N_2 = \$100.000$;
 $n_1 = 40$ dias; $n_2 = 70$ dias.
 24. \$40.000; \$90.000.
 25. $V_1 = \$4.000$; $V_2 = \$2.000$; ($V_1 + V_2 =$
 $\$6.000$).
 26. \$4.716,98.
 27. 24 dias.
 28. $n = 60$ dias; $d = 4,5455\%$ a.m.
 29. $n \cong 39$ dias.
 30. $d = 3,0541\%$ a.m.
 31. $V = \$220.800$; $i_c = 64,9199\%$ a.a.
 32. $d = 1,5\%$ a.m.; $i_c = 20,2804\%$ a.a.
 33. $N = \$1.300$.
 34. $d = 1,8671\%$ a.m.
 35. $i = 1,5\%$ a.m.; $i_c = 1,4889\%$ a.m.
 36. $d = 2,8702\%$ a.m.; $D = \$114,81$.
 37. $i_c = 3,7802\%$ a.m.
 38. $PU = 937,66$.
 39. taxa *over* = 34,90% a.a.
 40. 99,56%.

Capítulo 5

1. a) \$11.685,48; b) \$11.345,12.
2. \$88.076,84.
3. 4.
4. \$2.091,80.
5. \$89.589,93.
6. \$105,34.
7. 7% a.m.
8. \$34,72.
9. \$36.598,62.
10. 15% a.m.
11. 14 meses.
12. 7% a.m.
13. \$43,40; \$41,33.
14. 19.
15. \$46,07.
16. 9,4377% a.a.; 11,9291% a.a.
17. 24.
18. \$10.000.
19. \$697,48; \$658.
20. \$2.468,37.
21. \$718,97.
22. 8,8950% a.m.
23. \$633.988,17.
24. 16,5670%.
25. 5 meses.
26. 72% a.a.; 83,70% a.a.; 76,41% a.a.;
74,16% a.a.; 101,22% a.a.
27. 40.
28. \$6.599,98.
29. 4; \$636,69.
30. \$890,96.
31. \$184.946,64; \$39.237,98.
32. 18.
33. \$209.956,28.
34. 180.
35. \$36.619,70.
36. \$32.927,13.
37. \$6.534,45.
38. \$3.446,34.
39. \$3.166.428,56; \$3.088.784,39;
\$1.715.205,05; \$3.799.794,47.
40. 15.
41. 5% a.m.
42. \$1.700,24.
43. \$779,3061.
44. 18; \$78,99.
45. \$300.
46. 1,7577329475% a.m.
47. \$14.089,11.
48. \$288,49.
49. 3% a.m.
50. 42,58% a.a.
51. \$424,20.
52. 1º ano = \$2.315,12;
2º ano = \$4.404,20.
53. \$4.887,68.
54. Juros do financiamento = 5,33% a.m. >
5% a.m. (melhor à vista).
55. 15.
56. 5 prestações – 29 de setembro.
57. \$1.307,46.
58. \$200.
59. \$730,98.
60. \$745,60.
61. 13 depósitos de \$300 e um 9º depósito
de \$252,27.
62. 12 depósitos de \$150 e um 13º depósito
de \$78,60.
63. 43 saques de \$500 e um último de
\$33,22.
64. \$2.111,53.
65. \$228,68.
66. \$2.637,97.
67. 5 prestações.
68. 2% a.m.

Capítulo 6

1. \$699.172,29.
2. \$108.549,38.
3. \$4.080,54.
4. \$133.466.323,58.
5. \$1.331.407,49.
6. 5% a.m.
7. \$71,05.
8. \$500.000.
9. \$44.145,95.
10. \$28,57.
11. \$218,45; \$439,90; \$655,35; \$873,80.
12. \$287,04.
13. \$14.663,39.
14. $G = \$203,44$.
15. $n = 12$.
16. \$566,60.
17. \$10.791.
18. 3%.
19. \$57.045,65.
20. \$36.520,64.
21. custo capitalizado (madeira) = \$30.940,65; custo capitalizado (aço) = \$34.336,26; ⇒ selecionar a de madeira.

Capítulo 7

1. 13,9762%.
2. 15%.
3. 55,91%.
4. 24,24%.
5. 10,5171%.
6. 3,4757% (em 41 dias).
7. \$1.822,12.
8. \$339,60.
9. 9,7144% a.m.
10. \$1.520,20; \$247.494,26; \$48.005.736,05.
11. \$1.866,53; \$302.377,52; \$1.202.977,23.
12. \$15.924.809,34.
13. \$35.911,55.
14. \$19.853.472.
15. \$60.841.274.
16. US\$1.526.338,25.
17. $VPL = -\$448.122 < 0$.
18. \$8.548.034,08.
19. $VPL = -\$4.059.606 < 0$.

Capítulo 8

1. a) \$787.268,48; b) \$1.004.516,44; c) \$169.210,89.
2. a) \$1.315.827,63; b) \$1.262.073,27; c) \$97.127,49; 47.016,75; d) \$3.112.616,93.
3. \$2.582,71.
4. a) \$243.860,44; b) \$145.178,07; c) \$137.652,86.
5. \$1.568.740,33.
6. a) \$2.180,14; b) \$1.492,23; c) \$4.578,30.
7. a) \$103.840,20; b) \$28.774,67; c) \$211.833,99.
8. a) \$100.000; b) \$28.000; c) \$200.000.
9. a) \$101.920,10; b) \$28.387,34; c) \$205.917; d) \$110.156,78; e) \$560.783,90; f) \$60.783,89.
10. a) \$70.958,56; b) \$160.000; c) \$102.958,56; d) \$310.416,45; e) 9,0456% a.t.
11. $TIR = 19,16\%$ a.a.
12. a) \$1.808,76; b) \$16.040,08; c) \$17.848,84; d) \$100.000; e) \$10.852,55; f) \$107.093,02; g) 1,9935%.
13. a) \$375.000; b) \$180.831,49; c) \$121.605,24; d) \$709.262,89.
14. \$3.750; \$1.808,31.

Capítulo 9

1. Esquema de pagamento e fluxo de caixa:

(em \$1.000)

Trimestre	Saldo devedor	Juros	Amortização	Comissão	IOF	Prestação	Fluxo de caixa
0	\$12.000,00	—	—	\$120,00	\$240,00	\$360,00	\$11.640,00
1	\$12.000,00	\$1.800,00	—			\$1.800,00	(\$1.800,00)
2	\$12.000,00	\$1.800,00	—			\$1.800,00	(\$1.800,00)
3	\$11.125,80	\$1.800,00	\$874,20			\$2.674,20	(\$2.674,20)
4	\$10.120,47	\$1.668,87	\$1.005,33			\$2.674,20	(\$2.674,20)
5	\$8.964,34	\$1.518,07	\$1.156,13			\$2.674,20	(\$2.674,20)
6	\$7.634,79	\$1.344,65	\$1.329,55			\$2.674,20	(\$2.674,20)
7	\$6.105,81	\$1.145,22	\$1.528,98			\$2.674,20	(\$2.674,20)
8	\$4.347,48	\$915,87	\$1.728,33			\$2.674,20	(\$2.674,20)
9	\$2.323,40	\$652,12	\$2.022,08			\$2.674,20	(\$2.674,20)
10	—	\$348,81	\$2.325,40			\$2.674,20	(\$2.674,20)

O custo efetivo do financiamento é de 15,7454% a.t. Esse valor é encontrado calculando-se a taxa interna de retorno do fluxo de caixa.

2. \$14.713,87.

3. Sem capitalização de juros.

4. Com capitalização de juros.

(em \$1.000)

Trimestre	Prestação não atualizada	Prestação atualizada	Trimestre	Prestação não atualizada	Prestação atualizada
0	\$360,00	\$360,00	0	\$360,00	\$360,00
1	\$1.800,00	\$1.854,00	1	—	—
2	\$1.800,00	\$1.909,62	2	—	—
3	\$2.674,20	\$2.922,17	3	\$3.536,63	\$3.864,57
4	\$2.674,20	\$3.009,84	4	\$3.536,63	\$3.980,51
5	\$2.674,20	\$3.100,13	5	\$3.536,63	\$4.099,92
6	\$2.674,20	\$3.193,14	6	\$3.536,63	\$4.222,92
7	\$2.674,20	\$3.288,93	7	\$3.536,63	\$4.349,61
8	\$2.674,20	\$3.387,60	8	\$3.536,63	\$4.480,10
9	\$2.674,20	\$3.489,23	9	\$3.536,63	\$4.614,50
10	\$2.674,20	\$3.593,90	10	\$3.536,63	\$4.752,94

5. 19,2192% a.t. (custo efetivo aparente).

6. \$9.116,34.

7. Set./out. = 1,6949%; out./nov. = 0,81967%; nov./dez. = -4,9578%; set./dez. = -2,5547%.

8. A planilha é a seguinte:

Mês	Saldo devedor	Juros	Amortização	Impostos	Prestação	Fluxo de caixa	Inflator	Prestação atualizada
0	\$81.600,00	—	—	\$1.632,00	—	\$79.968,00	1,0000	—
1	\$62.667,83	\$4.080,00	\$18.932,17		\$23.012,17	(\$23.012,17)	1,1000	\$25.313,39
2	\$42.789,05	\$3.133,39	\$19.878,78		\$23.012,17	(\$23.012,17)	1,2100	\$27.844,73
3	\$21.916,33	\$2.139,45	\$20.872,72		\$23.012,17	(\$23.012,17)	1,3310	\$30.629,20
4	—	\$1.095,82	\$21.916,33		\$23.012,17	(\$23.012,17)	1,4641	\$33.692,12

9. Custo efetivo real = 5,88% a.m.; custo efetivo aparente = 16,46% a.m.

10. a) 16,48% a.m.; b) 19,3164% a.m.; c) 24,8974% a.m.

11. Rentabilidade aparente = 0,5683% a.m.; rentabilidade real = -3,1134% a.m.

12. \$24.017,31.
13. \$584.876,46.
14. \$179.119,52.
15. 2,8% a.m.
16. Rentabilidade aparente no período = 33% (3,6290% a.m.); rentabilidade real = 5,56% (0,6782% a.m.).
17. Custo aparente no período = 132,33% (9,82% a.m.); custo real no período = 16,17% (1,68% a.m.).

Capítulo 10

1. a) 300% e 200%;
b) $\pm \sqrt{-0,5}$;
c) 15,83%;
d) 50% e 100%.
2. 8,4418%.
3. \$3.720.000/mês.
4. 8% a.a.
5. a) $TIR_A = 25\%$;
b) $TIR_{A-B} = 14,2857\%$;
c) $VPL_A = \$26,03$; $VPL_B = \$23,55$; $VPL_{A-B} = \$2,48$;
d) $TIR_{A-B} > 10\% \Rightarrow$ melhor A.
6. $TIR_{a-b} = 37,5\%$.
7. $VPL_{N-V} = -\$365 < 0 \Rightarrow$ melhor V; $VPL_N = \$974,38$ e $VPL_V = \$1.339,75 \Rightarrow$ melhor V.
8. $CAE_V = \$12.000 < CAE_N = \$13.084 \Rightarrow$ melhor V (manter o equipamento velho).
9. $AE_Y = \$40 < AE_X = \$99,59 \Rightarrow$ X é melhor.
10. $AE_B = \$54.325,38 > AE_A = \$46.157 \Rightarrow$ B é melhor.
11. $CAE_B = \$5.374 < CAE_A = \$5.394 > \Rightarrow$ B é melhor.
12. $VPL_X = \$1.338,20$ e $VPL_Y = \$1.794,44$; $AE_X = \$353 > AE_Y = \$292 \Rightarrow$ X é melhor.
13. a) $VPL_A = \$21.646,54$; $VPL_B = \$13.132,32$;
b) $TIR_A = 51,01\%$; $TIR_B = 22,56\%$;
c) $AE_B = \$6.390,67 > AE_A = \$2.755,11 \Rightarrow$ A é preferível.
14. $AE_B = \$0,9607 > AE_A = \$0,4707 > \Rightarrow$ B é melhor.
15. $CAE_{\text{terceirizar}} = \$96.000 > CAE_{\text{fabricar}} = \$95.605,70 \Rightarrow$ melhor fabricar.
16. $CAE_N = \$412,93 < CAE_V = \$450/\text{ano} \Rightarrow$ melhor N (comprar novo equipamento).
17. $AE_V = \$200/\text{ano} > AE_N = \$61,90/\text{ano} \Rightarrow$ melhor V (manter o equipamento velho V).
18. TIR: -200%; 20,9%; 22,8%; 25,4%; VPL: -\$610,24; \$766,05; \$796,42; \$779,20; alternativa C.
19. (AE_1 \$1.999,20; AE_2 \$3.817,37; AE_3 \$5.956,04; $AE_4 = \$1.567,73$); terceiro ano.
20. \$2.200, \$2.880,95, \$2.814,80, \$2.523,77, \$2.637,98, período ótimo: segundo.
21. 9 anos.
22. \$14.653,00.
23. $V_{L-C} = \$2.300,94 > 0 \Rightarrow$ melhor *leasing*.
24. $TA = 7,2471\%$ a.m.; $R = \$1.449,42$.

- 25. $i_A = 4\%$ a.m.
- 26. $i_A = 3\%$ a.m.
- 27. TA = 6,6266%; R = US\$13.253,28.
- 28. TA = 7,5716%; R = US\$15.143,29.
- 29. TA = 3,6643% a.m.; R = \$732,86.
- 30. VRG = 32,2578%.
- 31. 36 meses.
- 32. $i_A = 3\%$ a.m.
- 33. a)

Indicador	Projeto A	Projeto B	Projeto C	Projeto D
VPL	\$18.549	\$51.921	\$87.577	\$19.338
TIR	31,15%	37,42%	29,36%	23,99%
B/C	1,22	1,35	1,35	1,05
PB	4	3	4	4
AE	\$7.165	\$20.057	\$33.830	\$7.470

b) Pelo VPL e AE, selecionamos C. Como era esperado, os dois indicadores conduzem à mesma seleção;

c)

K	VPL (A)	VPL (C)	Seleção
18%	\$22.602,47	\$111.052,21	C
20%	\$18.549,38	\$87.577,16	C
24%	\$11.171,07	\$46.081,52	C
26%	\$7.807,57	\$27.725,57	C
28%	\$4.638,71	\$10.770,32	C
30%	\$1.649,63	-\$4.910,54	A
36%	-\$6.367,83	-\$45.382,67	A
40%	-\$11.030,82	-\$67.784,26	A

34. $CAE_{Fiat} = \$15.359,49$; $CAE_{Ford} = \$14.856,12$; $CAE_{Honda} = \$13.921,33$; $CAE_{Toyota} = \$14.212,13$. Selecionar Honda.

35. $AE_A = \$914.772,43$; $AE_B = \$1.433.414,56$; $AE_C = \$1.159.503,06$. Tamanho escolhido: B.

36. a) e b)

c)

Projeto	VPL	TIR	Projeto	Anuidade equivalente (AE)
A	\$4,13	13,07%	B	\$2.238,10
B	\$3.884,30	37,98%	C	\$1.978,85
B - A	\$3.880,17	38,22%		
⇒ Selecionar B			⇒ Selecionar B	

37.

Alternativa	VPL	Anuidade equivalente (AE)
A	\$56,37	\$14,49
B	60,54	12,03
C	66,97	13,31

⇒ Selecionar A

Capítulo 11

1. FLUXO DE CAIXA

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
Fluxos de investimento				
Investimento inicial	-\$1.180.000			
Fluxos operacionais				
Diminuição dos custos operacionais		\$388.000	\$388.000	\$388.000
Aumento da receita operacional		\$210.000	\$210.000	\$210.000
Efeitos fiscais				
Do aumento da depreciação		\$118.000	\$118.000	\$118.000
Da diminuição do custo operacional		-\$116.400	-\$116.400	-\$116.400
Do aumento da receita operacional		-\$63.000	-\$63.000	-\$63.000
FLUXO DE CAIXA ECONÔMICO	-\$1.180.000	\$536.600	\$536.600	\$536.600

VPL = \$155.439,52 > 0 e TIR = 17,34% > 10% ⇒ A compra do equipamento está justificada.

(*) Todos os fluxos, menos o de investimento, foram considerados fluxos postecipados (no final do respectivo ano).

2. \$1.237,08/ano.

3. FLUXO DE CAIXA

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Fluxos de investimento					
Compra do equipamento	-\$220.000				
Fluxos operacionais					
Diminuição dos custos operacionais		\$52.000	\$52.000	\$52.000	\$52.000
Incremento da receita operacional		\$30.000	\$30.000	\$30.000	\$30.000
Efeitos fiscais					
Da depreciação		\$16.500	\$16.500	\$16.500	\$16.500
Da diminuição dos custos operacionais		-\$15.600	-\$15.600	-\$15.600	-\$15.600
Do incremento da receita operacional		-\$9.000	-\$9.000	-\$9.000	-\$9.000
FLUXO DE CAIXA ECONÔMICO	-\$220.000	\$73.900	\$73.900	\$73.900	\$73.900

TIR = 12,96% > 12% ⇒ A compra do equipamento se justifica economicamente.

4. Como os tornos mecânicos podem operar por apenas mais quatro anos, e a vida útil da nova bateria é de dez anos, as duas alternativas são comparáveis somente durante os primeiros quatro anos.

FLUXO DE CAIXA

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Liquidação
Fluxos de investimento						
Compra dos tornos com controle numérico	-\$200.000					\$156.000
Venda dos tornos mecânicos	\$21.000					
Aumento das necessidades de capital de giro	-\$5.000					\$5.000
Fluxos operacionais						
Diminuição dos custos operacionais		\$30.000	\$30.000	\$30.000	\$30.000	
Efeitos fiscais						
Da depreciação diferencial		\$3.900	\$3.900	\$3.900	\$6.000	
Da diminuição dos custos operacionais		-\$9.000	-\$9.000	-\$9.000	-\$9.000	
Da venda dos tornos de controle numérico						-\$10.800
Dos juros pagos pelo financiamento		\$4.800	\$3.350	\$1.755		
Fluxos do financiamento						
Financiamento tomado	\$160.000					
Prestações pagas pelo financiamento		-\$64.338	-\$64.338	-\$64.338		
FLUXO ECONÔMICO-FINANCEIRO	-\$24.000	-\$34.638	-\$36.088	-\$37.683	\$27.000	\$150.200

VPL (12%) = \$2.095,87 > 0 ⇒ A substituição se justifica do ponto de vista econômico-financeiro.

(*) Todos os fluxos, menos os de investimento, foram considerados fluxos postecipados (no final do respectivo ano).

5. O fluxo deve ser projetado durante quatro anos:

FLUXO DE CAIXA (milhões)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Liquidação
Fluxos de investimento						
Compra do equipamento	-\$28,00					
Capital de giro	-\$3,00					\$3,00
Fluxos operacionais						
Aumento da receita operacional		\$18,00	\$18,00	\$18,00	\$18,00	
Diminuição dos custos operacionais		\$0,60	\$0,60	\$0,60	\$0,60	
Efeitos fiscais						
Da depreciação diferencial		\$4,20	\$4,20			
Da diminuição dos custos operacionais		-\$0,18	-\$0,18	-\$0,18	-\$0,18	
Do aumento da receita operacional		-\$5,40	-\$5,40	-\$5,40	-\$5,40	
FLUXO DE CAIXA ECONÔMICO	-\$31,00	\$17,22	\$17,22	\$13,02	\$13,02	\$3,00

VPL (12%) = \$17,56 milhões > 0 ⇒ A compra do equipamento se justifica economicamente.

6. O período de comparação está limitado ao tempo de duração do equipamento antigo (três anos).

QUADRO DE AMORTIZAÇÃO DO FINANCIAMENTO

Ano	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	\$30.000,00	—	—	—
1	\$21.360,69	\$8.639,31	\$4.500,00	\$13.139,31
2	\$11.425,50	\$9.935,21	\$3.204,10	\$13.139,31
3	—	\$11.425,50	\$1.713,82	\$13.139,31

FLUXO DE CAIXA

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Liquidação
Fluxos de investimento					
Compra do equipamento novo	-\$60.000,00				\$30.000,00
Venda do equipamento antigo	\$10.000,00				
Fluxos operacionais					
Diminuição dos custos operacionais		\$4.000,00	\$4.000,00	\$4.000,00	
Aumento da receita operacional		\$30.000,00	\$30.000,00	\$30.000,00	
Efeitos fiscais					
Da depreciação diferencial		\$2.400,00	\$2.400,00	\$2.400,00	
Da diminuição do custo operacional		-\$1.200,00	-\$1.200,00	-\$1.200,00	
Do aumento da receita operacional		-\$9.000,00	-\$9.000,00	-\$9.000,00	
Da venda do equipamento antigo	-\$1.200,00				
FLUXO ECONÔMICO	-\$51.200,00	\$26.200,00	\$26.200,00	\$26.200,00	\$30.000,00
Empréstimo	\$30.000,00				
Prestações do empréstimo		-\$13.139,31	-\$13.139,31	-\$13.139,31	
Efeito fiscal dos juros		\$1.350,00	\$961,23	\$514,15	
FLUXO ECONÔMICO-FINANCEIRO	-\$21.200,00	\$14.410,69	\$14.021,92	\$13.574,84	\$30.000,00

VPL_{ECONÔMICO} (20%) = \$21.351 > 0 ⇒ Viável economicamente.

VPL_{ECONÔMICO-FINANCEIRO} (22%) = \$24,030 > 0 ⇒ Viável econômico-financeiramente.

7.

FLUXO DE CAIXA (em milhões)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Liquidação
Receitas operacionais		\$2,00	\$2,00	\$2,00	\$2,00	
Investimentos						
Equipamento	-\$4,00					\$0,84 (a)
Terreno	-\$1,00					\$1,00
Mudanças no capital de giro (b)	-\$0,30					\$0,30 (c)
Custos						
Custos operacionais		-\$0,40	-\$0,40	-\$0,40	-\$0,40	
Gastos indiretos		-\$0,20	-\$0,20	-\$0,20	-\$0,20	
Depreciação (d)		-\$1,00	-\$1,00	-\$1,00	-\$1,00	
Lucro tributável		\$0,40	\$0,40	\$0,40	\$0,40	
- Impostos (30%)		-\$0,12	-\$0,12	-\$0,12	-\$0,12	
+ Depreciação (e)		\$1,00	\$1,00	\$1,00	\$1,00	
FLUXO ECONÔMICO	-\$5,30	\$1,28	\$1,28	\$1,28	\$1,28	\$2,14

- (a) Valor de liquidação = Valor de venda - Impostos sobre ganho de capital = $1,2 - 0,30 \times (1,20 - 0,00)$.
 (b) Mudanças do capital de giro em $t = 0,15 \times (\text{Receitas}_t - \text{Receitas}_{t-1})$. O capital de giro é recuperado no final.
 (c) Recuperação do capital de giro.
 (d) $\$4 / 4$.
 (e) A depreciação é somada novamente, pois se trata de uma despesa não caixa.
 (*) Todos os fluxos, menos os investimentos, foram considerados fluxos postecipados.

8.

FLUXO DE CAIXA

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Liquidação
Aumento de receitas (a)		\$550.000	\$550.000	\$550.000	\$550.000	
Investimentos						
Investimento inicial líquido	-\$1.265.000 (b)					\$450.000 (c)
Custos						
Aumento custos variáveis (d)		-\$50.000	-\$50.000	-\$50.000	-\$50.000	
Diminuição custos fixos (e)		\$50.000	\$50.000	\$50.000	\$50.000	
Depreciação diferencial (f)		-\$200.000	-\$200.000	-\$200.000	-\$200.000	
Lucro tributável (a) + (d) + (e) + (f)		\$350.000	\$350.000	\$350.000	\$350.000	
- Impostos (30%)		-\$105.000	-\$105.000	-\$105.000	-\$105.000	
+ Depreciação diferencial (g)		\$200.000	\$200.000	\$200.000	\$200.000	
FLUXO ECONÔMICO	-\$1.265.000	\$445.000	\$445.000	\$445.000	\$445.000	

- (a) $300.000 \text{ unidades} \times \$4,5/\text{unidade} - 200.000 \text{ unidades} \times \$4/\text{unidade} = \$550.000/\text{ano}$.
 (b)

Custo dos novos equipamentos	\$1.500.000
Caixa gerado pela venda dos equipamentos substituídos	(250.000)
Impostos sobre ganho de capital na venda dos equipamentos substituídos $0,30 \times (250.000 - 200.000)$	15.000
Investimento inicial líquido	\$1.265.000

 (c) $0,90 \times [1.500.000 - (4/6) \times 1.500.000]$.
 (d) $300.000 \text{ unidades} \times \$1,5/\text{unidade} - 200.000 \text{ unidades} \times \$2/\text{unidade} = \$50.000/\text{ano}$.
 (e) $\$350.000/\text{ano} - \$300.000/\text{ano} = \$50.000/\text{ano}$.
 (f) $(\$1.500.000/6 - \$200.000/4) = \$200.000/\text{ano}$.
 (g) A depreciação é somada novamente, pois se trata de uma despesa não caixa.

Análise econômica: $(TIR_E = 23,81\% \text{ a.a.}) > 20\% \text{ a.a.} \Rightarrow$ O projeto é economicamente viável.

9. QUADRO DE AMORTIZAÇÃO DO FINANCIAMENTO – SISTEMA SAC (EM MILHÕES)

Ano	Saldo devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	9,60			
1	8,64	1,15	0,96	2,11
2	7,68	1,04	0,96	2,00
3	6,72	0,92	0,96	1,88
4	5,76	0,81	0,96	1,77

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Liquidação
Compra do novo equipamento	-\$24,00					
Venda (liquidação) do novo equipamento						\$12,00 (a)
Efeito fiscal na liquidação do novo						-\$1,36 (b)
Venda do atual equipamento	\$6,00					
Efeito fiscal na venda do atual	-\$0,68 (c)					
Capital de giro	-\$3,00					\$3,00
Receita operacional (d)		\$12,00	\$12,00	\$12,00	\$12,00	
Aumento dos custos fixos (e)		\$2,40	\$2,40	\$2,40	\$2,40	
Diminuição do custo variável (f)		-\$5,20	-\$5,20	-\$5,20	-\$5,20	
- Depreciação diferencial (g)		-\$3,00	-\$3,00	-\$3,00	-\$3,00	
Lucro tributável (d) + (e) + (f) + (g)		\$6,20	\$6,20	\$6,20	\$6,20	
IR (34%)		-\$2,11	-\$2,11	-\$2,11	-\$2,11	
+ Depreciação diferencial		\$3,00	\$3,00	\$3,00	\$3,00	
FLUXO ECONÔMICO	-\$21,68	\$7,09	\$7,09	\$7,09	\$7,09	\$13,64
+ Empréstimo	\$9,60 (h)					-\$5,76 (i)
- Prestações		-\$2,11	-\$2,00	-\$1,88	-\$1,77	
+ Benefício fiscal dos juros		\$0,39	\$0,35	\$0,31	\$0,27	
FLUXO ECONÔMICO-FINANCEIRO	-\$12,08	\$5,37	\$5,45	\$5,52	\$5,60	\$7,88

- (a) $1,5 \times 2 \times (\$24 / 6)$.
- (b) $0,34 \times (\text{Valor de venda} - \text{Valor contábil}) = 0,34 \times (\$12 - \$8)$.
- (c) $0,34 \times (\$6 - \$4)$.
- (d) $2.000.000 \text{ unidades} \times \$14/\text{unidade} - 1.600.000 \text{ unidades} \times \$10/\text{unidade}$.
- (e) $\$12,2 - \$9,8$.
- (f) $2.000.000 \text{ unidades} \times \$6,6/\text{unidade} - 1.600.000 \text{ unidades} \times \$5/\text{unidade}$.
- (g) $(\$24/6 - \$4 / 4)$.
- (h) $0,40 \times \$24$.
- (i) Empréstimo liquidado pelo seu saldo devedor do quarto ano.

Observação: o valor pago à consultoria é um custo afundado irrecuperável para efeitos do cômputo do fluxo incremental, e o capital de giro foi considerado fluxo antecipado (fluxo no início do respectivo ano).

$VPL_{\text{ECONÔMICO}} (20\%) = \$3,26 \text{ milhões} > 0 \Rightarrow \text{Viável economicamente.}$

$VPL_{\text{ECONÔMICO-FINANCEIRO}} (25\%) = \$4,05 \text{ milhões} > 0 \Rightarrow \text{Viável econômico-financeiramente.}$



Bibliografia

- AYRES Jr., F. *Matemática financeira*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1971.
- BIERMAN, H.; SMIDT, S. *The capital budgeting decision*. Nova York: MacMillan Publishing Co., 1990.
- BREALEY, R.; MYERS, S. *Princípios de finanças empresariais*. Lisboa: McGraw-Hill, 1992.
- BRUNI, A. L.; FAMA, R. *Matemática financeira com HP 12C e Excel*. São Paulo: Atlas, 2004.
- CISSEL; CISSEL; FLASPOHLER. *The mathematics of finance*. Houghton Mifflin Co., 1982.
- CLARK, J. J., HINDELANG, T. J.; PRITCHARD, R. E. *Capital budgeting: planning and control of capital expenditures*. 3. ed. Nova York: Prentice Hall, 1989.
- FARO, C. *Fundamentos de matemática financeira*. São Paulo: Saraiva, 2006.
- FERNANDES, Polo, E. *Engenharia das operações financeiras*. São Paulo: Atlas, 1995.
- GITMAN, L. *Princípios de administração financeira*. 10. ed. São Paulo: Pearson, 2004.
- JUER, Milton. *Matemática financeira: aplicações no mercado de títulos*. Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (Ibmecc), 1984.
- LEVY, H.; SARNAT, M. *Capital investment and financial decisions*. Reino Unido: Prentice Hall, 1994.
- MANNARINO, R. *Introdução à engenharia econômica*. Rio de Janeiro: Campus, 1991.
- SAMANEZ, C. P. *Engenharia econômica*. São Paulo: Pearson, 2009.
- SAMANEZ, C. P. *Gestão de investimentos e geração de valor*. São Paulo: Pearson, 2007.
- SAMANEZ, C. P. *Leasing: análise e avaliação*. São Paulo: Atlas, 1990.
- SAMANEZ, C. P. *Matemática financeira: aplicações à análise de investimentos*. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2007.
- SHIM, J. K.; SIEGEL, J. G. *Managerial finance: theory and problems*. Shaum's Outline Series. Nova York: McGraw-Hill, 1983.
- TEIXEIRA, J.; DI PIERO NETO, S. *Matemática financeira*. São Paulo: Pearson, 1995.



Sobre o autor

Graduado em engenharia industrial, **Carlos Patricio Samanez** é mestre em ciências na área de engenharia de produção, pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio, 1984), e doutor em administração, finanças e economia de empresas, pela Fundação Getulio Vargas de São Paulo (FVG-SP, 1994). É professor dos cursos de graduação e pós-graduação do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio e professor adjunto da Faculdade de Economia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). É autor dos livros *Gestão de investimentos e geração de valor* e *Engenharia econômica*, publicados pela Pearson Education. Já publicou diversos artigos sobre finanças em revistas especializadas. Atualmente, além das atividades acadêmicas, atua como consultor de empresas na área de gestão financeira e análise de projetos.

CARLOS PATRÍCIO
SAMANEZ
MATEMÁTICA
FINANCEIRA

5ª EDIÇÃO

Matemática/Finanças

Referência na área, *Matemática financeira*, em sua quinta edição, além de manter sua reconhecida estrutura didática, traz atualizações importantes, como as referentes aos títulos públicos federais, e pequenas mudanças pensadas para auxiliar ainda mais no entendimento teórico do estudante.

E essas novidades não são as únicas: o conteúdo foi totalmente revisado com ênfase na verificação de todos os exercícios resolvidos e propostos, a fim de torná-los ainda mais didáticos, e os seguintes tópicos foram inseridos:

- Metodologia de cálculo da taxa over em conformidade com as circulares do Bacen.
- Conceitos de taxa básica financeira, taxa referencial, taxa de juros de longo prazo e taxa Cetip.
- Metodologias e práticas usadas pela Caixa Econômica Federal no cálculo das prestações.
- Novas técnicas da orçamentação de capital.

Todas essas características tornam esta obra ideal para estudantes de graduação em economia, administração e ciências contábeis, bem como para alunos de pós-graduação e MBA, profissionais e pessoas que se interessam pelo tema.



www.pearson.com.br/samanez

O site de apoio do livro oferece: para professores, manual de soluções e apresentações em PowerPoint.

www.pearson.com.br

ISBN 978-85-7605-799-4



9 788576 057994